Úvod do Ramseyovy teorie

Vašek Rozhoň

Abstrakt. Věděl jsi, že housenky bývají zbarvené tak, že připomínají rostlinu, na které se pasou? Zkus si nějakou housenku nakreslit a pokus se její články vybarvit třemi barvičkami tak, aby se v obarvení nevyskytovaly žádné pravidelnosti, které by nebohého tvora mohly prozradit. Asi ti to moc nepůjde – tu se vyskytne stejná barvička třikrát vedle sebe, jindy čtyři stejné barvičky v pravidelných vzdálenostech od sebe. Překvapivě to ani jinak být nemůže, jak tvrdí van der Waerdenova věta. Existuje celý matematický obor zabývající se faktem, že velké objekty často obsahují pravidelné podstruktury. A právě tohoto oboru (nazývaného také Ramseyova teorie) se v této dvojpřednášce dotkneme.

Ramseyova věta

Ze všeho nejdřív začneme tvrzením, které možná znáš pod názvem Dirichletův princip (v angličtině také pigeonhole principle a v němčině zase Schubfachprinzip).

Tvrzení. (Princip holubníku) *V r šuplících se usídlilo $kr+1$ holubů. V alespoň jednom z nich se jich teď mačká alespoň $k+1$.*

Dále budeme pokračovat Ramseyovou větou, podle které se celý matematický obor nyní jmenuje. Ta zase tvrdí, že přijde-li na večírek dost velký počet hostí, nalezneme pět z nich tak, že se každí dva z této pětice znají, nebo se neznají žádní dva.

Věta. (Ramseyova) *Pro každé k a b existuje n takové, že pokud libovolně obarvíme hrany úplného grafu na n vrcholech b barvičkami, nalezneme v něm vždy jednobarevný úplný podgraf na k vrcholech.*

Cvičení 1. Rozmysli si, že úplný graf na šesti vrcholech s hranami obarvenými dvěma barvami vždy obsahuje jednobarevný cyklus délky tři. Jsi-li v rozverné náladě, rozmysli si, že obsahuje i jednobarevný cyklus délky čtyři.

Cvičení 2. Anička a Bára střídavě barví hrany úplného grafu na šesti vrcholech. Vyhrává ta, která první obarví cyklus délky tři svou barvou. Proč hra nemůže skončit remízou a kdo vyhraje, začíná-li Anička?

Cvičení 3. Dokaž, že pro každé k a b existuje n takové, že obarvíme-li nějak hrany úplného bipartitního grafu s partitami velikosti n pomocí b barviček, nalezneme v něm vždy jednobarevný úplný bipartitní podgraf s partitami velikosti k.

Cvičení 4. Na každém políčku čtvercové tabulky bydlí holub, nebo housenka. Diagonálu tabulky tvoří políčka ležící v i-tém řádku a i-tém sloupci (pro všechna i). Vybereme si nějakých n sloupců a n řádků z původní tabulky a podíváme se na políčka na průsečících těchto řádků a sloupců, ta tvoří čtvercovou *podtabulku* velikosti n. Dokaž, že:

(1) Pokud je původní tabulka dost velká, najdeme v ní *podtabulku* se stranou dlouhou deset políček, na které bydlí jen holubi, nebo jen housenky.
(2) Pokud navíc požadujeme, že vybereme-li i-tý řádek, musíme zároveň vybrat i i-tý sloupec, předchozí tvrzení neplatí.
(3) Nyní platí stejná podmínka jako v předchozím bodu, ale stačí nám, že pokud *podtabulku* rozdělíme na tři části – políčka na diagonále, nad diagonálou a pod diagonálou – v každé části bydlí pouze zvířátka jednoho druhu. Dokaž, že nyní *podtabulku* se stranou délky deset najít umíme. (Zkus úlohu nejprve vyřešit pro tabulku symetrickou podle diagonály.)
(4) Nyní z původní tabulky vystřihneme souvislý čtvereček o straně délky deset. Může se stát, že ať už je původní tabulka jakkoli velká, žádný takový čtvereček obydlený stejnými zvířátky v ní nenajdeme?

Cvičení 5. (těžké) Dokaž, že obarvíme-li b barvičkami všechna přirozená čísla, najdeme mezi nimi jednobarevnou trojici x, y, z takovou, že $x+y=z$. Co kdybychom hledali čtveřici, pro kterou platí $x+y+z=u$?

Ramseyova věta se vztahuje i na obecnější struktury, než jsou grafy. Pokud na soustředění přijede dostatečný počet účastníků a organizátoři si pro každou trojici účastníků rozmyslí, jestli tvoří vhodný tým na výsadek, nebo ne, dokáží najít skupinku deseti účastníků takovou, že každá trojice z nich vybraná je vhodná, nebo vhodná není žádná taková trojice.

Věta. (Ramseyova věta pro p-tice) *Pro každé k, b a p existuje n takové, že pokud libovolně obarvíme všechny p-tice množiny s n prvky pomocí b barviček, nalezneme v ní vždy podmnožinu velikosti k takovou, že všechny p-tice z této podmnožiny mají stejnou barvu.*

Hilbertovo lemma

Dále se budeme věnovat větám podobným té Ramseyově, které zabezpečují, že určité velké objekty obsahují nějakou strukturu. Asi nejstarší takovou větou je Hilbertovo lemma z konce 19. století[1].

[1] Našeho letopočtu.

Definice. (Krychličková posloupnost) *Krychličková posloupnost* délky l a dimenze s pro čísla $a_0, d_1, d_2, \ldots, d_s$ je množina všech čísel ve tvaru

$$a_0 + k_1 \cdot d_1 + k_2 \cdot d_2 + \cdots + k_s \cdot d_s,$$

kde každé k_i nabývá hodnot mezi 0 a $l-1$ včetně.

Příklad. Krychličková posloupnost dimenze jedna je aritmetickou posloupností.

Věta. (Hilbertovo lemma pro čísla) *Pro jakékoli s a b existuje dostatečně velké n takové, že obarvíme-li nějak čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme v rámci těchto n čísel jednobarevnou krychličkovou posloupnost délky dva a dimenze s.*

Cvičení 6. (těžké) Dokaž předchozí větu.

Věta. (Hilbertovo lemma pro množiny) *Mějme libovolné s, b a množinu X, jejíž všechny podmnožiny libovolně obarvíme pomocí b barviček. Je-li X dost velká, existují její podmnožiny $A_0, A_1, \ldots, A_s$, které jsou všechny neprázdné a disjunktní[2] a pro které platí, že každé sjednocení A_0 s nějakou podmnožinou $\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ má stejnou barvu.*

Cvičení 7. Uvědom si, že předchozí věta platí pro $s = 1$.

Cvičení 8. Předpokládej platnost předešlé věty a dokaž ji s přidanou podmínkou, že velikost A_0 musí být alespoň sto.

Cvičení 9. Mějme množinu X a její podmnožinu Y, $|Y| = 100$. Dokaž, že pokud je X dostatečně velká, existují $a, b \in X \setminus Y$ taková, že pro všechna $Z \subset Y$ je barva $a \cup Z$ stejná jako barva $b \cup Z$. Jinými slovy všechna rozšíření a a b do Y mají stejnou barvu.

Cvičení 10. (těžké) Dokaž Hilbertovo lemma pro množiny.

Cvičení 11. Uvědom si, jak spolu souvisí obě verze Hilbertova lemmatu a odvoď variantu pro čísla s pomocí varianty pro množiny.

Van der Waerdenova věta

Nakonec se podíváme na větu, která zajišťuje, že při barvení přirozených čísel nutně dostáváme dlouhé aritmetické posloupnosti.

Věta. (van der Waerdenova) *Pro jakákoli přirozená čísla l a b existuje dostatečně velké n takové, že pokud libovolně obarvíme čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme vždy v rámci těchto n čísel jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky l. Navíc nejmenší takové číslo n nazvěme $W(l, b)$.*

Cvičení 12. Uvědom si, že platí: $W(1, b) = 1$, $W(2, b) = b + 1$ a $W(l, 1) = l$.

[2] Tj. průnik každé dvojice je prázdná množina.

Tvrzení. $W(3,2) \leq 5 \cdot (2 \cdot 2^5 + 1)$.

Návod. Začneme s úseky po sobě jdoucích čísel délky pět – uvědom si, že v nich najdeš aritmetickou posloupnost délky tři, jejíž první dva členy mají stejnou barvu. Předpokládáme, že třetí člen má opačnou barvu.

V druhém kroku je potřeba za sebe poskládat dostatečný počet pěticiferných bloků. Když jich bude 33, máme už jistotu, že dva bloky budou stejné. V těchto dvou blocích teď můžeme stejným způsobem aplikovat předchozí argument. Nakonec stačí najít dvě vhodné posloupnosti délky tři končící ve stejném čísle. Uvědom si, že kvůli tomuto třetímu číslu je potřeba přidat dalších 32 bloků délky pět.

Cvičení 13. Uvědom si, že jsme byli nehospodární, neboť $W(3,2) = 9$.

Tvrzení. $W(3,3) \leq 7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1) \cdot (2 \cdot 3^{7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$.

Návod. Začneme jako v předchozím případu a zkonstruujeme dvě jednobarevné posloupnosti délky tři „mířící“ do stejného čísla. To ale může být obarveno třetí barvičkou. Je tedy třeba vzít celý blok délky $7 \cdot (2 \cdot 3^7 + 1)$, na kterém funguje naše konstrukce, a zkopírovat ho dostkrát za sebe, abychom měli jistotu, že najdeme dva stejně obarvené. Nakonec najdeme tři posloupnosti mířící do stejného čísla.

Definice. (Krychličková posloupnost s okraji) Okraj krychličkové posloupnosti je krychličková posloupnost vzniklá tak, že několik prvních indexů $k_1, \ldots, k_i$ původní posloupnosti položíme rovny l (a ostatní dále necháme nabývat všech hodnot mezi 0 a $l-1$ včetně).

Krychličková posloupnost s okraji je jednobarevná, jestliže jsou všechny její prvky obarveny stejnou barvou a zároveň je jednobarevný každý její okraj (každý okraj ale může být obarven jinak).

Příklad. Krychličková posloupnost dimenze s má s okrajů. Posledním okrajem je vždy jediné číslo.

Cvičení 14. Zkus zobecnit předchozí konstrukce pro $W(3,k)$ s libovolným k. Uvědom si souvislost s Hilbertovým lemmatem pro čísla.

Věta. (van der Waerdenova pro krychličkové posloupnosti)

Pro jakákoli přirozená čísla l, b a s existuje dostatečně velké n takové, že pokud libovolně obarvíme čísla od jedné do n pomocí b barviček, najdeme vždy v rámci těchto n čísel jednobarevnou krychličkovou posloupnost délky l a dimenze s. Navíc nejmenší takové číslo n nazvěme $W(l,s,b)$.

Tvrzení. $W(l, s+1, b) \leq W(l,s,b) \cdot W(l, 1, b^{W(l,s,b)})$.

Tvrzení. $W(l+1, 1, b) \leq 2 \cdot W(l, b, b)$.

Cvičení 15. Uvědom si, že z předchozích dvou tvrzení už lze matematickou indukcí dokázat van der Waerdenovu větu.

Existují různé silnější varianty van der Waerdenovy věty, jednou z nich je Greenova-Taova věta dokázaná v roce 2004.

Věta. (Greenova-Taova) *Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti složené pouze z prvočísel.*

Návody

3. Stačí dvakrát aplikovat princip holubníku. Nejprve zvol jednu partitu dostatečně velkou, aby měl libovolný vrchol z druhé partity alespoň k hran jedné barvy. Poté přidávej vrcholy do druhé partity. Stačí, když se jich nakonec najde k tak, že posloupnost barev jejich hran bude stejná (a to se musí stát).

4.

(1) Uvažuj postupně jednotlivé řádky a aplikuj na ně princip holubníku.
(2) Zkus tabulku rozdělit na tři části stejně jako v třetím bodu.
(3) Použij Ramseyovu větu; dvojice zvířátek na pozicích (i, j) a (j, i) odpovídají barvě hrany mezi vrcholy i a j. Na diagonálu pak bude potřeba ještě jednou aplikovat princip holubníku.
(4) Šachovnice.

5. Použij Ramseyovu větu; barva hrany mezi i a j bude stejná jako barva čísla $j - i$. Najdi jednobarevný trojúhelník.

6. Dokazuj matematickou indukcí. Předpokládej, že v dostatečně dlouhém bloku umíš najít krychličkovou posloupnost dimenze s. Následně za sebe poskládej dost bloků této délky tak, aby při každém obarvení byly nějaké dva obarveny stejně. Nakonec spoj krychličkové posloupnosti z těchto dvou bloků, a získej tak posloupnost dimenze $s + 1$.

7. Stačí vzít množinu velikosti $b + 1$ a posloupnost jejích podmnožin, které se do sebe postupně zanořují. Dvě z podmnožin musí mít stejnou barvu, a poslouží tak jako A_0 a $A_0 \cup A_1$.

8. Vezmi si množinu $X = X_1 \cup X_2$, kde $|X_1| = 100$ a X_2 je dost velká. Následně definuj nové obarvení podmnožin X_2 tak, že nová barva pro Y bude stará barva množiny $X_1 \cup Y$.

9. Uvědom si, že nějaké tvé obarvení může kódovat i to, jaké staré barvy mají všechna rozšíření a do Y. Těch je mnoho, ale jen konečně mnoho.

10. Postupuj indukcí. Podobně jako v předchozím cvičení najdi A_0 a A_1 takové, že rozšíření A_0 mají stejnou barvu jako rozšíření $A_0 \cup A_1$ do nějaké množiny X. V X pak najdi menší krychličku.

11. Napiš si čísla v binární soustavě.

Literatura a zdroje

[1] R. Graham, B. Rotschild, J. Spencer: *Ramsey Theory*, 1990.