Ramseyova věta

MARTIN TÖPFER

ABSTRAKT. Tématem přednášky jsou různé verze Ramseyových vět. Ty v podstatě říkají, že v dostatečně velkém systému nemůže být úplný nepořádek. V případě grafů, že vždy najdeme kliku nebo nezávislou množinu nějaké velikosti.

„Úplný nepořádek není možný.“ Tak by se dala shrnout všechna tvrzení, která si tu předvedeme. Abychom si zjednodušili představu našeho světa, budeme se pohybovat ve světě grafů.

Příklad. (Motivační) Mezi šesti lidmi jsou alespoň tři, kteří se navzájem znají, nebo alespoň tři, kteří se neznají.

Tvrzení. (Dirichletův princip) *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Pak kdykoli umístíme $kn+1$ předmětů do n přihrádek, tak alespoň v jedné přihrádce bude alespoň $k+1$ předmětů.*

Grafové pojmy

Definice. *Graf* (V, E) je dvojice množiny vrcholů V a množiny hran E.

Definice. *Úplný graf* K_n je graf na vrcholech 1, 2, …, n, který obsahuje všechny hrany.

Definice. *(Hranové) obarvení grafu* G pomocí k barev je funkce f, která každé hraně přiřadí jednu barvu. Matematicky bychom řekli, že f je zobrazení z E do $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Definice. *(Indukovaný) podgraf* grafu (V, E) je takový graf, že jeho vrcholy V' jsou některé vrcholy z V a jeho hrany jsou všechny hrany původního grafu, které vedou mezi vrcholy z V'.

Definice. *Klika* v grafu je taková množina jeho vrcholů, že každé dva z nich jsou spojeny hranou.

Definice. *Nezávislá množina* v grafu je taková množina jeho vrcholů, že žádné dva z nich nejsou spojeny hranou.

A jdeme na to!

Věta. (Ramseyova věta – jednoduchá verze) *Pro každá n, m přirozená čísla existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že všechny grafy na N vrcholech obsahují buď kliku velikosti n nebo nezávislou množinu velikosti m. Nejmenší takové číslo N nazvěme Ramseyovým číslem $R(n, m)$.*

O velikosti Ramseyových čísel se toho obecně moc neví a neexistuje ani žádný příliš těsný odhad na jejich velikost. Například o hodnotě $R(5, 5)$ víme, že je mezi 43 a 49, ale ani v době výkonných počítačů přesnou hodnotu neznáme. My si ukážeme následující odhad na jejich velikost:

$$2^{\frac{k}{2}} < R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

Nyní si uvědomíme, že místo rozhodování je/není hrana bychom mohli úplný graf obarvovat pomocí dvou barev. Pak se už přirozeně nabízí zobecnění této věty.

Definice. Graf na vrcholech V je *jednobarevný* v obarvení f, pokud všechny hrany mají v f stejnou barvu.

Věta. (Ramseyova věta – vícebarevná verze) *Pro libovolná $b, n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že když $|V| = N$ a množina barev $|B| = b$, tak pro každé obarvení $f : \binom{V}{2} \to B$ existuje jednobarevný úplný graf na n vrcholech.*

Věta. (Schurova věta) *Pro libovolný počet barev $b \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že když obarvíme čísla $\{1, 2, \ldots, N\}$ pomocí b barev, pak budou existovat tři čísla x, y, z stejné barvy splňující $x + y = z$.*

Věta. (van der Waerdenova věta) *Pro libovolný počet barev $b \in \mathbb{N}$ a číslo l existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že když obarvíme čísla $\{1, 2, \ldots, N\}$ pomocí b barev, pak bude existovat jednobarevná aritmetická posloupnost délky alespoň l.*

Věta. (Ramseyova věta – nekonečná) *Pro libovolné $b \in \mathbb{N}$ a množinu barev $|B| = b$ platí, že pro každé obarvení $f : \binom{V}{2} \to B$ existuje v nekonečném spočetném grafu jednobarevný úplný spočetný graf na n vrcholech.*

Konečně příklady

Příklad. Ukažte, že pro každé $m \geq 2$ existuje p_0 tak, že pro všechna prvočísla $p > p_0$ má kongruence

$$x_m + y_m \equiv z_m \pmod{p}$$

řešení.

Příklad. Spolupráce mezi sedmnácti vědci vypadá tak, že každí dva komunikují o jednom ze tří témat. Ukažte, že existují tři vědci, kteří se navzájem baví o stejném tématu.

Příklad. Mezinárodní společnost má celkem 1978 členů ze šesti zemí, kteří jsou očíslováni čísly $1, 2, \ldots, 1978$. Ukažte, že existuje člen, jehož číslo je součtem čísel dvou jeho krajanů nebo je dvakrát větší než číslo nějakého jeho krajana.

(IMO 1978)

Zdroje a literatura

[1] přednáška Kombinatorika a grafy II na MFF UK (Vít Jelínek)
[2] Mareš, M.; *Ramseyovy věty*, *http://mj.ucw.cz/papers/ramsey.pdf*
[3] Taylor, G.; *Ramsey Theory*, *http://web.mat.bham.ac.uk/D.Kuehn/RamseyGreg.pdf*
[4] Hliněný, P.; *Graph Theory*, lecture 12, *http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-lect-en-12.pdf*