Ptákologie

Petr Šimeček

Tato přednáška Vám osvětlí, že fundamentální matematické problémy lze formulovat i bez složitého názvosloví a nepřehledných značek. Ptákologie je vlastně kombinatorická logika, jen místo „kombinátorů“ používá něco mnohem hezčího — ptáky.

Les mnoha ptáků

Definice. (Složený pták) $C = A \circ B \Leftrightarrow (\forall x)\ Cx = A(Bx)$

Definice. (Fták) F *(nazýván též posměvavý pták):* $(\forall x)\ Fx = xx$.

Předpoklad. (P1) *Pro každé dva ptáky existuje jejich složený pták.*

Předpoklad. (P2) *V lese žije Fták.*

Definice. A *je zamilovaný do* $B \Leftrightarrow AB = B$.

Věta. $(P1)\ \&\ (P2) \Rightarrow (\forall x)\ x$ *je zamilovaný.*

Definice. A *je egocentrický* $\Leftrightarrow AA = A$ *(je zamilovaný sám do sebe).*

Věta. $(P1)\ \&\ (P2) \Rightarrow (\exists x)\ x$ *je egocentrický.*

Definice. A, B *jsou spřátelení* $\Leftrightarrow (\exists x)\ Ax = Bx$.

Definice. A *je společenský* $\Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)\ Ax = yx$ *(A je přítelem každého ptáka).*

Věta. $(P1)\ \&\ (\exists A)$ *společenský* $\Rightarrow (\forall x)\ x$ *je zamilovaný.*

Cvičení. *Je Fták společenský?*

Věta. $(P1)\ \&\ A \circ B$ *je společenský* $\Rightarrow A$ *je společenský.*

Definice. A *a* B *si rozumí* $\Leftrightarrow (\exists x, y)\ Ax = y\ \&\ Bx = y$.

Definice. A *je šťastný* $\Leftrightarrow (\exists x, y)\ Ax = y\ \&\ Ax = y$ *(rozumí si sám se sebou).*

Věta. $(P1)\ \&\ (P2) \Rightarrow (\forall A, B)\ A, B$ *si rozumí.*

Věta. A *je zamilovaný* $\Rightarrow A$ *je šťastný.*

Definice. A *je posedlý* $B \Leftrightarrow (\forall x)\ Ax = B$.

Definice. A *je beznadějně egocentrický* $\Leftrightarrow (\forall x)\ Ax = A$ *(A je posedlý sám sebou).*

Definice. (Jestřáb) J: $(Jx)y = Jxy = x$.

Věta. $(P1)\ \&\ (P2)\ \&\ (\exists J) \Rightarrow (\exists A)\ A$ *je beznadějně egocentrický.*

Cvičení. J *egocentrický* $\Rightarrow J$ *beznadějně egocentrický.*

Cvičení. *Jx egocentrický $\Rightarrow J$ je zamilovaný do x.*

Cvičení. *$(\forall x, y)$ $(Jx = Jy \Rightarrow x = y)$ (tzv. krácení jestřábem zleva)*

Cvičení. *J zamilovaný do $Jx \Rightarrow J$ zamilovaný do x.*

Věta. *J egocentrický $\Rightarrow (\forall x)$ $J = x$ (Jestřáb je v lese sám).*

Definice. (Identický (idiotský) pták) $Ix = x$.

Věta. *I je společenský $\Leftrightarrow (\forall x)$ x je zamilovaný.*

Cvičení. *$(\exists I)$ & $(\forall A, B)$ A, B si rozumí $\Rightarrow I$ je společenský.*

Cvičení. *I je zjevně egoistický. Kdyby byl I beznadějně egoistický, bylo by to velmi smutné. Proč?*

Definice. (Skřivánek) S: $Sxy = x(yy)$.

Věta. $(\exists I)$ & $(\exists S) \Rightarrow (\exists F)$.

Věta. *$(\exists S) \Rightarrow (\forall x)$ x je zamilovaný.*

Cvičení. *Proč je beznadějně egocentrický skřivánek tak atraktivní?*

Věta. $(\exists x, y)$ $x \neq y \Rightarrow J \neq S$, $SJ \neq S$.

Cvičení. $(\exists S)$ & $(\exists J)$ & $(JS = S) \Rightarrow (\forall x)$ $xS = S$.

Věta. *$(\exists S) \Rightarrow (\exists x)$ x je egocentrický.*

Definice. (Bažant (skládací pták)) B: $Bxyz = x(yz)$.

Cvičení. $(\exists B) \Rightarrow (P1)$.

Definice. (Vrabec) V: $Vxyz = xz(yz)$.

Definice. (Moudrý pták) Θ: $x(\Theta x) = \Theta x$ *(na x odpoví Θ jméno jednoho z ptáků, do kterých je x zamilovaný).*

Věta. $(P1)$ & $(P2)$ & $(\exists A)(\forall x)$ $Ax = x \circ F \Rightarrow (\exists \Theta)$.

Definice. (Sova) $\Upsilon xy = y(xy)$.

Cvičení. $(\exists \Upsilon)(\exists I) \Rightarrow (\exists F)$.

Věta. *$\Upsilon\Theta$ je moudrý pták, $\Theta\Upsilon$ je moudrý pták.*

Cvičení. *Υ je zamilovaný do $A \Rightarrow A$ je moudrý pták.*

Russelův les zpívajících ptáků

Někteří ptáci umí v lesech zpívajících ptáků nejen hovořit, ale i zpívat. Při našem zkoumání nás bude obvykle zajímat právě jejich zpěv. Tradičně se v lese zpívajících ptáků vyskytuje speciální pták Ω.

Cvičení. *Ornitolog Bolzano vypozoroval:*

(1) $(\forall x)$ Ωx *zpívá* $\Leftrightarrow$ xx *zpívá.*
(2) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)$ zy *zpívá* $\Leftrightarrow$ xy *nezpívá.*

Myslíte, že byl Bolzano bystrý ornitolog?

Cvičení. *Ornitolog Cantor vypozoroval:*

(1) $(\forall x)$ Ωx *zpívá* $\Leftrightarrow$ x *nezpívá.*
(2) $(\exists \Theta)$

Co si myslíte o Cantorově výzkumu?

Cvičení. (Curryho les zpívajících ptáků) *Neomylný ornitolog vypozoroval:*

(1) y *zpívá* $\Rightarrow$ Ωxy *zpívá.*
(2) x *nezpívá* $\Rightarrow$ Ωxy *zpívá.*
(3) $x, \Omega xy$ *zpívají* $\Rightarrow$ y *zpívá.*
(4) $(\forall x)(\exists y)$ y *zpívá* $\Leftrightarrow$ Ωyx *zpívá.*

Kteří ptáci v Curryho lese zpívají?

Les mistrů

Definice. *Výrazem zapsaným pomocí ptáků $x, y, z, \ldots$ rozumíme výraz (ptáka), který je napsaný jen s pomocí uvedených ptáků a závorek; značíme $[x, y, z, \ldots]$.*

Poznámka. *Nemůžeme použít skládání ptáků. Pomocí skládání sice ukážeme, že pták v lese existuje, ale ne jak vypadá jeho zápis pomocí jiných ptáků.*

Cvičení. *Pomocí B, F zapište pro libovolného ptáka x ptáka, do kterého je x zamilovaný.*

Cvičení. *Pomocí B, F zapište ptáka, který je egoistický.*

Definice. *Les mistrů je les, kde žijí J, V a ptáci z nich odvození.*

Poznámka. *„Odvození“ ptáka v lese mistrů bude znamenat jeho zápis pomocí V a J.*

Věta. *Lze odvodit I.*

Věta. *Lze odvodit F.*

Věta. *Lze odvodit D, kde $Dxy = yx$.*

Věta. *Lze odvodit libovolného ptáka typu $A\alpha = (\dots)$, kde výraz $(\dots)$ je zapsaný jen pomocí J, V a α (tzv. α-redukce).*

(1) $(\dots) = \alpha \Rightarrow A = I = VJJ$.
(2) $(\dots) = Y\alpha$ (Y je $[J, V]$) $\Rightarrow A = Y$.
(3) $(\dots) = Y$ (Y je $[J, V]$) $\Rightarrow A = JY$.
(4) $(\dots) = YZ \Rightarrow A = VY_1Z_1$, kde Y_1, Z_1 jsou α-redukcí Y, Z.

Věta. *Lze odvodit libovolného ptáka typu $Ax_1x_2 \dots x_n = [x_1, x_2, \dots x_n]$.*

Věta. *Lze odvodit libovolného ptáka typu $Ax_1x_2 \dots x_n = [A, x_1, x_2, \dots x_n]$.*

(1) *Zapíšeme jako $(By)x_1x_2 \dots x_n = [y, x_1, x_2, \dots x_n]$ (ptáka A nahradíme na 2. straně rovnosti ptákem y).*
(2) *Provedeme α-redukci přes $x_n \dots y$, zapíšeme ptáka B ve tvaru $B = [J, V]$.*
(3) *Hledaný pták je pták, do kterého je B zamilovaný, tedy $SB(SB)$.*