Prvočísla, dokonalá čísla a jiná čísla

Radek Erban — 28. března 2001

V tomto Kroužku matematiky se budeme bavit o prvočíslech. Již ze základní školy dobře víš, že prvočíslo je číslo, které má právě dva dělitele — číslo 1 a sebe samotné. Několik prvních prvočísel tedy je: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Důležitost prvočísel tkví v tom, že jsou to základní stavební kameny přirozených čísel vzhledem k násobení, tím míním, že každé přirozené číslo větší než 1 se dá zapsat jako součin prvočísel. Kvůli této známé principielní důležitosti prvočísel se kolem nich vynořila spousta důležitých otázek, kterých si všimneme v našem povídání.

Není těžké dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho. Zajímavou otázkou ovšem zůstává, jak jsou prvočísla rozložena mezi přirozenými čísly. Ke zkoumání tohoto problému si zavedeme funkci $\pi(x)$, která nám udává, kolik je všech prvočísel menších nebo rovných x. Chování této funkce pěkně vystihuje funkce $\frac{x}{\log x}$, kde symbolem $\log x$ označujeme přirozený logaritmus čísla x.

Nyní následuje pro přehlednost seznam některých výsledků, kterými se budeme na přednášce zabývat (symbol p označuje libovolné prvočíslo, n kladné přirozené číslo):

Pomocné lemma.
(1) $2^n \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}$
(2) $\prod_{n<p\leq 2n} p \mid \binom{2n}{n}$
(3) Nechť $r(p)$ splňuje $p^{r(p)} \leq 2n < p^{r(p)+1}$, pak

$$\binom{2n}{n} \mid \prod_{p\leq 2n} p^{r(p)}.$$

(4) Pokud $n > 2$ a $\frac{2n}{3} < p \leq n$, pak

$$p \nmid \binom{2n}{n}.$$

(5) $\prod_{p\leq n} p < 4^n$

Věta 1. Nechť $n > 1$. Pak

$$\frac{n}{8\log n} < \pi(n) < \frac{6n}{\log n}\,.$$

Věta 2. Nechť n je přirozené číslo. Pak existuje prvočíslo p splňující $n < p \leq 2n$.

Větě 2 se někdy rovněž říká Bertrandův postulát. Kromě dosud uvedených výsledků se kolem prvočísel můžeme setkat i se spoustou dalších otázek. Jedním z problémů je rovněž problém prvočíselných dvojčat. Prvočíselná dvojčata jsou prvočísla, jejichž rozdíl je roven číslu 2. Příkladem prvočíselných dvojčat mohou být dvojice: $(3, 5)$; $(17, 19)$; $(881, 883)$; $(1997, 1999)$ nebo $(10^9 + 7, 10^9 + 9)$. Prvočíselných dvojčat je mnohem méně než samotných prvočísel, zůstává ovšem otázkou, zdali jich je konečně nebo nekonečně mnoho.

Na závěr tohoto textíku uvádím příklady, které si můžeš zkusit vyřešit za domácí úkol. Se znalostmi z přednášky je to snadné.

1. příklad Ukažte, že každé přirozené číslo větší než 6 se dá vyjádřit jako součet různých prvočísel.

2. příklad Ukažte, že neexistují přirozená čísla k, m, n, která splňují rovnici

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} = m.$$

3. příklad Nalezněte všechna řešení difantické rovnice $n! = m^k$ v přirozených číslech.

4. příklad Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4n + 3$ a tvaru $6n + 5$.