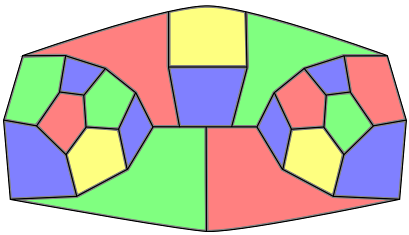
Problém čtyř barev

Filip Hlásek

Abstrakt. Seznámíme se s jedním z nejslavnějších problémů 20. století a povíme si také něco o jeho řešení.

Věta. (O čtyřech barvách) *K obarvení libovolné mapy tak, aby žádné dva sousedící státy nebyly obarveny stejnou barvou, stačí čtyři barvy.*



Počátky tohoto problému datujeme do roku 1852, kdy se Francis Guthrie pokoušel obarvit mapu anglických států a všiml si, že mu čtyři barvy skutečně stačí. Nastolil tehdy otázku, zda to platí pro každou mapu, a zanedlouho se tento problém dostal i ke slavnému britskému matematikovi De Morganovi. Prvního „důkazu“ se ale věta dočkala až v roce 1879 od sira Alfreda Bray Kempe a hned následující rok od Petera Guthrie Taita. Oba důkazy čekaly na vyvrácení dlouhých jedenáct let. Další vážné pokusy přišly až téměř za 50 let a první potvrzený důkaz byl podán Appelem a Hakenem roku 1976. Většina jejich důkazu byla provedena na počítači. Na přednášce si zkusíme některé důkazy vyvrátit a naopak si ukážeme, co může při dokazování fungovat.

Tvrzení. *V každé mapě existuje stát, který má nejvýše pět sousedů.*

Důkaz. Budeme uvažovat rovinný graf, kde každý vrchol reprezentuje jeden stát a hrana mezi dvěma vrcholy znamená, že spolu státy sousedí. Z Eulerovy formule pro rovinné grafy plyne

$$v + f = e + 2,$$

Klíčová slova. teorie grafů, rovinné grafy, obarvení

kde v je počet vrcholů, f je počet stěn a e je počet hran v grafu. Pro spor dále předpokládejme, že každý stát má alespoň 6 sousedů, neboli $e \geq \frac{6v}{2} = 3v$. V žádném rovinném grafu ale nemůže být více než $2v - 2$ stěn (tolik jich je v triangulaci), tedy

$$3v > v + 2v - 2 \geq v + f = e + 2 \geq 3v + 2 > 3v,$$

což je hledaný spor.

Definice. (Obtažení) Nazývejme *AB-obtažení* v mapě obarvené čtyřmi barvami sjednocení všech hranic států obarvených barvou A a všech hranic států obarvených barvou B kromě hranic mezi státy obarvenými těmito barvami.

Například zelenomodré-obtažení v nějaké mapě je obtažení všech zeleno-modrých regionů států. Každé takové obtažení obsahuje všechny vrcholy v mapě a jedná se v podstatě o množinu cyklů. Všechny takové cykly musí mít sudou délku.

Tvrzení. *Pokud v mapě existuje množina cyklů sudých délek, která obsahuje všechny vrcholy, tak je mapa obarvitelná čtyřmi barvami.*

Cvičení. Existuje v každé mapě cyklus sudé délky obsahující všechny vrcholy?

Dále se pokusíme problém zjednodušit. Mějme mapu obarvenou čtyřmi barvami A, B, C a D. Různými barvami obarvíme ty hrany, které jsou v AB-obtažení, ty, které jsou v AC-obtažení, a ty, které jsou v obou obtaženích. Každá hrana tak bude mít jednu ze tří barev a žádné dvě sousední hrany nebudou mít stejnou barvu. Jiná formulace zadaného problému je, zda hrany každé mapy umíme obarvit třemi barvami tak, aby hrany, které mají společný vrchol, neměly stejnou barvu.

Poděkování

Děkuji Mirku Olšákovi za všechny jeho náměty a postřehy k tomuto tématu.

Literatura a zdroje

[1] Robin Thomas: *The Four Color Theorem*, *http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html*
[2] Donald Hatch, Melinda Green: *"Proof" of the 4-Color Map Theorem*, *http://www.superliminal.com/4color/4color.htm*