Princip inkluze a exkluze

Tonda Češík

Abstrakt. Ukážeme si princip inkluze a exkluze a jeho aplikace při řešení některých kombinatorických úloh. Podíváme se i na tu asi nejznámější – problém zmatené šatnářky.

Pro přiblížení tématu přednášky začněme motivačním příkladem.

Příklad. Ve městě fungují 2 sportovní kluby. Fotbalový klub má 12 členů, tenisový klub 9. Přitom 3 fotbalisté hrají i tenis. Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?

Řešení. Pokud sečteme počty členů v jednotlivých klubech, dostaneme číslo $12+9 = 21$. To ale není odpověď na naši otázku, neboť každého, kdo je členem obou klubů, jsme započítali dvakrát. Musíme tedy odečíst počet lidí, kteří jsou členy obou klubů zároveň. Hledaný počet tak je $21 - 3 = 18$.

Při řešení předchozího příkladu jsme si uvědomili, že pro velikost sjednocení dvou konečných množin A, B platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Zkusme vyřešit stejnou úlohu pro 3 kluby.

Příklad. Město z předchozího příkladu založilo ještě volejbalový klub. Přihlásilo se do něj 15 lidí, z toho 4 fotbalisté, 3 tenisti a jeden fotbalista–tenista.

Podobnou úvahou jako předtím lze dospět ke vzorci pro 3 množiny:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Takto lze pokračovat přidáváním dalších a dalších množin. Zobecnění vzorce pro n množin se nazývá *Princip inkluze a exkluze* (zkráceně PIE).

Tvrzení. (Princip inkluze a exkluze) *Buďte $A_1, \ldots, A_n$ konečné množiny. Potom platí následující vztah:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Alternativně lze vztah zapsat takto:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Cvičení. Uvědomte si, že oba tvary zápisu PIE říkají totéž.

Pár příkladů

Příklad 1. Z čísel $1, 2, \ldots, 1000$ vyškrtáme všechny násobky 3, 5, 7, 42. Kolik jich zůstane?

Příklad 2. Určete počet způsobů, jak lze obarvit políčka tabulky 3×3 červeně, žlutě a modře tak, že každá barva je použita právě třikrát a navíc žádný řádek ani sloupec není jednobarevný. (Obarvení lišící se pouze otočením považujeme za různá.) (MKS 27–S–4)

Příklad 3. Kolika způsoby lze seřadit písmena A, E, K, L, P, O, R, S, V tak, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov PRASE, PES, LAK?

Zapeklitější problém

Úloha. (Problém šatnářky) Na shromáždění přijde n pánů. Každý z nich si odloží svůj klobouk v šatně. Při odchodu šatnářka díky své nezměrné roztržitosti vydá každému z pánů jeden náhodně vybraný klobouk. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane zpět od šatnářky svůj vlastní klobouk?

K vyřešení úlohy je vhodné zavést si následující pojmy.

Definice. *Permutace* množiny $\{1, \ldots, n\}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\pi \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Definice. *Pevný bod* zobrazení π je takové x, že $\pi(x) = x$. (Neboli bod, který se zobrazí sám na sebe.)

Úloha. (Šatnářka očima matematika) Kolik permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ nemá pevný bod?

Další příklady

Příklad 4. V rovině je trojúhelník a dvě různé kružnice. Kolik maximálně bodů se může nacházet na průsečíku alespoň dvou útvarů?

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že 4 náhodně vytažené hrací karty obsahují eso?

Příklad 6. Najděte počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

takových, že $x_1 \leq 4$ a $x_2 \leq 7$.

Příklad 7. Chceme postavit n manželských párů do řady tak, aby nikdo nestál vedle svého partnera. Kolik máme možností?

Literatura

[1] Matoušek, J. a Nešetřil, J.; *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Praha, 2002