Příklady z teorie čísel

Michael „Majkl“ Bílý

Abstrakt. Příspěvek ukazuje různorodé těžké úlohy z teorie čísel využívající ne zcela standardní známé věty.

Nejprve příklad na práci s odhady.

Příklad 1. Jakých hodnot nabývá posloupnost

$$a_n = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor ?$$

Pak procvičení práce se zbytky.

Příklad 2. Nechť $t(k)$ je největší lichý dělitel k. Najděte všechna přirozená a taková, že existuje přirozené n, pro které jsou všechny výrazy

$$t(n+a) - t(n),\ t(n+a+1) - t(n+1),\ \dots,\ t(n+2a-1) - t(n+a-1)$$

dělitelné 4.

Tady budeme potřebovat trochu teorie o cyklotomických polynomech – pokud $3 \nmid n$, pak $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$.

Příklad 3. Pokud je $4^n + 2^n + 1$ prvočíslo, pak je n mocnina trojky. Dokažte.

Věta 4. *Pro libovolné číslo $k \in \mathbb{N}$ existuje v posloupnosti 2^n člen ve tvaru $\overline{k\dots}$.*

K důkazu této věty budeme potřebovat známé tvrzení.

Tvrzení 5. *Množina $\{\{\alpha n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je hustá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pokud je α iracionální číslo.*

Poznámka 6. $\{x\}$ značíme desetinnou část čísla x, tedy $x - \lfloor x \rfloor$.

Teď už můžeme snadno vyřešit následující úlohu.

Příklad 7. Na tabuli je napsáno číslo 2010. V každém kroku můžeme buď číslo vynásobit dvěma, nebo umazat poslední cifru. Dokažte, že

(a) po konečně mnoha krocích může být na tabuli číslo 2008,
(b) po konečně mnoha krocích může být na tabuli libovolné číslo.

Zde budeme potřebovat tvrzení, že řád prvku mod p dělí $p - 1$.

Příklad 8. Buď p prvočíslo a n, q přirozená čísla taková, že $q \mid (n+1)^p - n^p$. Ukažte, že $p \mid q-1$.

V dalším příkladu budeme potřebovat Čínskou větu o zbytcích a Dirichletovu větu.

Příklad 9. Nazvěme n *suprové*, pokud existují a, b, c tak, že

$$n = (b,c)(a,bc) + (c,a)(b,ca) + (a,b)(c,ab).$$

Dokažte, že

(a) existuje 2011 po sobě jdoucích suprových čísel,
(b) existuje libovolně mnoho po sobě jdoucích suprových čísel.

Zde (a,b) značí největší společný dělitel čísel a, b.

Tady si půjčíme těleso velikosti 4.

Příklad 10. Pokud existuje posloupnost a_n přirozených čísel, splňujících

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n},$$

pak $3 \mid k-2$.

V obou následujících příkladech využijeme vzorečku pro níže definovanou funkci τ.

Příklad 11. Nechť $\tau(n)$ značí počet dělitelů n. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$$

pro celá čísla m, n. (IMO-98-3)

Příklad 12. Pokud $\tau(a) = \tau(b)$ a $\tau(a^2) = \tau(b^2)$, platí $\tau(a^3) = \tau(b^3)$? (MEMO-2012-T8)

Následují dva příklady na Pellovu rovnici.

Příklad 13. Pokud $x(y+1)$ a $y(x+1)$ jsou čtverce, pak x nebo y je čtverec. Dokažte.

Příklad 14. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho n takových, že $p = nr$, kde p je polovina obvodu trojúhelníku s celočíselnými stranami a r je poloměr kružnice tomuto trojúhelníku vepsané.

Jeden příklad na Lifting The Exponent lemma.

Příklad 15. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m,n), které splňují

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1).$$

Zajímavé využití Hallovy věty.

Příklad 16. Přirozená čísla k a n splňují $k > n!$. Dokažte, že existují po dvou různá prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$, které jsou postupně dělitele čísel $k+1, k+2, \ldots, k+n$.

Na závěr příklad na jednu triviálnější větu.

Věta 17. (Chicken McNugget theorem) *Nechť a, b jsou nesoudělná přirozená čísla, pak všechna čísla větší než $(a-1)(b-1)$ se dají vyjádřit ve tvaru $ka + lb$ pro nějaká přirozená k, l.*

Příklad 18. Mějme n takové, že $3 \nmid n$. Dokažte, že existuje přirozené číslo m takové, že $\forall k > m$ lze k vyjádřit jako součet cifer nějakého násobku n.