

Príkladíky z geometrie

Marek Tesar

Určite veľa z vás pozná rôzne vety a zákonitosti, ktoré platia v rovinnej geometrii. Na tejto prednáške si niektoré z nich zopakujeme, prípadne sa môžete dozvedieť niečo nové, no ale hlavne budeme rátať veľa príkladov.

Na začiatku prednášky sa budeme venovať najmä tetivovým štvoruholníkom. A ak náhodou nevíete ako taký tetivový štvoruholník vyzerá, tak si z toho nič nerobte, stačí si prečítať nasledujúcu definíciu.

Definícia. Štvoruholník $ABCD$ nazveme *tetivovým* ak body A, B, C a D ležia všetky na jednej spoločnej kružnici.

Každý tetivový štvoruholník má niekoľko zaujímavých vlastností. Nás však budú zaujímať najmä nasledujúce tri:

- súčet uhlov pri protilahlých vrcholoch je 180 stupňov
- uhol ktorý zvierajú jedna strana spolu s uhlopriečkou je rovnako veľký ako uhol, ktorý zvierajú protilahlá strana s druhou uhlopriečkou
- dĺžky strán spĺňujú nasledujúcu rovnosť: $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$

Príklad. Nech A, B a P sú body na kružnici k . Nech bod Q je projekcia bodu P na priamku AB a R , resp. S nech je projekcia na dotyčnicu kružnice k v bode A , resp. B . Dokážte, že $|PQ|$ je geometrický priemer $|PR|$ a $|PS|$.

Príklad. Nech A a B sú dva rôzne priesečníky dvoch rôznych kružníc. Priamka prechádzajúca bodom A pretína tieto kružnice v bodoch C a D . Nech P a Q sú projekcie bodu B na dotyčnice našich dvoch kružníc v bodoch C a D . Dokážte, že priamka PQ sa dotýka kružnice s priemerom AB .

No a ďalej budeme riešiť rôzne príkladíky, či už ľahšie alebo ťažšie. Tu je niekoľko z nich:

Príklady.

- Dokážte, že pre každé $n \geq 6$ vieme štvorec rozdeliť na n menších štvorcov. Dokážte tiež, že pre $n = 5$ to nejde.
- Dokážte, že pre každé $n \geq 55$ sa dá kocka rozdeliť na n menších kociek.
- Dokážte, že ak máme n štvorcov, tak ich vieme rozlámať na niekoľko (konečne veľa) častí tak, že sa z nich bude dať sformovať jeden veľký štvorec.
- Majme mnohoúhelník P a v ňom bod A . Nájdite dva body B a C na obvode mnohoúhelníka P tak, aby bol bod C stredom úsečky AB .