Přerozstříhatelnost

MICHAL „KENNY“ ROLÍNEK

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá tím, které dvojice geometrických útvarů na sebe lze za určitých pravidel přeskládat.

O co jde?

Definice. Řekneme, že geometrický útvar $M \subset \mathbb{R}^n$ lze *přerozstříhat* na geometrický útvar $N \subset \mathbb{R}^n$, jestliže útvar M lze pomocí rovných řezů rozdělit na konečný počet částí, z nichž lze složit útvar N.

Přirozeně vyvstává otázka, které všechny dvojice útvarů na sebe lze přerozstříhat.

Mnohoúhelníky

V letech 1832 a 1835 dokázali nezávisle na sobě W. Bolyai a P. Gerwien následující pozoruhodnou větu

Věta. (Bolyai-Gerwien theorem) *Každé dva mnohoúhelníky o stejném obsahu na sebe lze přerozstříhat.*

Důkaz provedeme pomocí série cvičení.

Cvičení. Každý mnohoúhelník lze rozstříhat na trojúhelníky.

Cvičení. Každý trojúhelník lze přerozstříhat na obdélník.

Cvičení. Každý obdélník lze přerozstříhat na čtverec.

Cvičení. Dva čtverce lze přerozstříhat na jeden čtverec.

Mnohostěny

Postup o dimenzi výš je již o něco náročnější. Otázka, zda každé dva mnohostěny

KLÍČOVÁ SLOVA. Bolayi-Gerwien theorem, Banach-Tarského paradox, Dehnův invariant, přerozstříhání

o stejném objemu jsou přerozstříhatelné, byla v roce 1900 vyhlášena jako třetí z tzv. Hilbertových problémů. Ještě v témže roce byla podána odpověď.

Věta. (Max Dehn) *Krychli nelze přerozstříhat na pravidelný čtyřstěn.*

Důkaz se opírá o následující tvrzení.

Tvrzení. *Každému mnohostěnu A lze přiřadit číslo $f_A \in \mathbb{R}$ (tzv. Dehnův invariant) takové, že je-li $A_1, \dots A_k$ nějaké rozřezání mnohostěnu A, platí*

$$f_A = f_{A_1} + \cdots + f_{A_k}.$$

Tvrzení. *Pro krychli A a pravidelný čtyřstěn B o stejném objemu platí $f_A \neq f_B$.*

V roce 1965 dokázal Jean-Pierre Sydler následující zesílení Dehnovy metody.

Věta. *Mnohostěny A a B jsou přerozstříhatelné, právě když $f_A = f_B$.*

Změna pravidel a následné šílenosti

Zajímavá otázka je, co se stane, pokud si přeskládávání trochu zjednodušíme a místo řezů uvážíme rozklady těles na libovolné podmnožiny.

Definice. Řekneme, že geometrický útvar $M \subset \mathbb{R}^n$ lze *přeskládat* na geometrický útvar $N \subset \mathbb{R}^n$, jestliže útvar M lze zapsat jako sjednocení konečně mnoha svých podmnožin, z nichž lze složit (pomocí shodných transformací) útvar N.

Výsledky jsou šokující!

Tvrzení. (Banach-Tarského paradox – slabá verze) *Kouli o objemu* 1 *lze přeskládat na kouli o objemu* 2.

Tvrzení. (Banach-Tarského paradox – silná verze) *Libovolné dvě omezené množiny o kladném objemu (s neprázdným vnitřkem) na sebe lze přeskládat.*

Ne, opravdu to není překlep! Za vším stojí o něco uvěřitelnější, avšak podstatně méně formální tvrzení.

Tvrzení. *Existují fakt šílené*[1] *množiny!*

Pár stříhacích příkladů

Příklad. Rozdělte pravidelný šestiúhelník na osm shodných mnohoúhelníků.
(ARO 1988)

Příklad. Nalezněte trojúhelník, který lze rozdělit na 5 shodných trojúhelníků.
(ARO 1988)

[1] Pokročilý čtenář nechť rozumí *neměřitelné množiny*.

Příklad. Ukažte, že tětivový čtyřúhelník lze rozřezat na n tětivových čtyřúhelníků, kdykoliv $n \geq 4$. (IMO 1972)

Příklad. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je těžnice AM delší než strana AB. Ukažte, že trojúhelník lze rozřezat na tři části, z nichž lze složit kosočtverec. (ARO 2010)

Literatura a zdroje

[1] E. C. Zeeman: *On Hilbert's Third Problem*, The Mathematical Gazette Vol. 86, No. 506 (Jul., 2002), pp. 241-247

[2] Titu Andreescu, Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston, 2009

[3] *http://www.mathlinks.ro*

[4] *http://wikipedia.org*