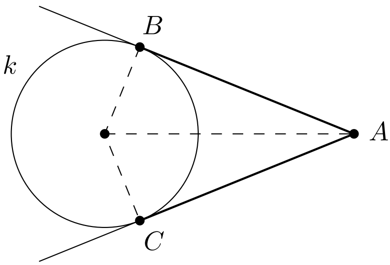
Překlápění tečen

Anička Doležalová

Na lehčích úlohách si ukážeme, jak využít „stejnost tečen“, tedy fakt z následujícího tvrzení:

Tvrzení. *Mějme kružnici k a bod A ležící vně kružnice. Veďme bodem A tečny ke k, body dotyku s kružnicí označme B, C. Pak $|AB| = |AC|$.*



Tvrzení. *Přímky p a q jsou společnými vnějšími tečnami kružnic k_1 a k_2. Přímka p se kružnice k_1 dotýká v bodě A a kružnice k_2 v bodě B, přímka q se kružnic dotýká v bodech C a D. Ukažte, že*

(i) $|AB| = |CD|$,

(ii) *pokud se kružnice neprotínají a jejich vnitřní tečna r protíná přímky p a q v bodech X a Y, pak $|AB| = |CD| = |XY|$.*

Tvrzení. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Ukažte, že $|AE| = |AF| = \frac{-a+b+c}{2}$.*

Tvrzení. *V trojúhelníku ABC se kružnice připsaná straně BC dotýká přímek BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Ukažte, že*

(i) $|AE| = |AF| = \frac{a+b+c}{2}$,

(ii) $|BD| = |BF| = \frac{a+b-c}{2}$, $|CD| = |CE| = \frac{a-b+c}{2}$

(iii) *body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí jsou středově souměrné podle středu příslušné strany.*

Příklad 1. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníku PXY. (Náboj 2008)

Příklad 2. Je dán trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k. Body X a Y leží na stranách AB a AC tak, že XY je tečna kružnice k. $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 8$. Určete obvod trojúhelníku AXY.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC. Nakreslíme tři tečny k jeho vepsané kružnici tak, že každá odřízne jiný z vrcholů trojúhelníku. Obvody odříznutých trojúhelníků jsou 1, 2 a 3. Dokažte, že původní trojúhelník byl pravoúhlý. (MKS 32–6–3)

Příklad 4. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$. Body K a M jsou body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD a ABC s úhlopříčkou AC. Body L a N jsou stejným způsobem body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD s BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník. (MO 54–A–I–2)

Tvrzení. (O tečnovém čtyřúhelníku) *Je dán čtyřúhelník $ABCD$, který má vepsanou kružnici (dotýká se všech čtyř stran). Ukažte, že $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.*

Příklad 5. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC se úhlopříčky AC dotýkají v jednom bodě.

Příklad 6. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $|AB|+|BC| = |CD|+|AD|$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a CBD se úhlopříčky BD dotýkají v bodech X a Y. Dokažte, že body X a Y jsou stejně vzdáleny od středu úsečky BD.

Příklad 7. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří mu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. (MO 63–B–I–3)

Příklad 8. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF proťaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte. (MO 52–A–III–2)

Příklad 9. Na straně BC trojúhelníku ABC je dán bod D. Trojúhelníkům BDA a DCA vepíšeme kružnice. Jejich vnější společná tečna různá od BC protíná AD v bodě X. Určete množinu bodů X, probíhá-li bod D stranu BC.

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M. Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2. (Rusko 2011)

Zdroje

Přednáška čerpá převážně ze staršího příspěvku Monči Pospíšilové, které bych tímto ráda poděkovala.