Pravidelnost mnohostěnů

Pítr Korcsok

Abstrakt. Přednáška má za cíl ukázat krásu pravidelných a polopravidelných mnohostěnů a vysvětlit základní pojmy z této oblasti. Taktéž se snaží naznačit základní vztahy, které v mnohostěnech a mezi nimi platí.

Při přípravě svojí přenášky jsem se nechal velmi výrazně inspirovat staršími příspěvkami Michala Hrocha (sborník ze soustředění v Olšance 2006) a Roberta Káldyho (sborník z Valdeku 2000), kterým na tomto místě děkuji.

Definice. (Mnohostěn) *Mnohostěn* je konečná množina mnohoúhelníků, v níž platí:

(1) Mnohoúhelníky se stýkají pouze na stranách nebo ve vrcholech.
(2) Každá strana mnohoúhelníka se stýká s právě jednou stranou jiného mnohoúhelníka.
(3) Pro každé dva mnohoúhelníky existuje cesta mezi jejich vnitřky.
(4) Pro každý vrchol V platí, že existuje cesta mezi vnitřky stěn k vrcholu V přilehlých taková, že neprochází vrcholem V.

Lemma. (Eulerova formule) *Pro mnohostěny platí*

$$v + f = e + 2,$$

kde v je počet vrcholů (vertices), s počet stěn (faces) a e počet hran (edges).

Poznámka. S toutéž Eulerovou formulí (vztahem) se lze setkat i v teorii grafů a říká, že výše uvedený vztah platí pro každý souvislý rovinný graf. Lze také ukázat, že pomocí stereografické projekce lze jakýkoli konvexní mnohostěn reprezentovat rovinným grafem.

Lemma. (Další podmínky pro existenci mnohostěnu)

$$3f \leq 2e, \quad 3v \leq 2e.$$

Věta. (Steinitzova) *Ke každé uspořádané trojici přirozených čísel $[f, v, e]$, pro které platí $f + v = e + 2$, $3f \leq 2e$, $3v \leq 2e$, existuje konvexní mnohostěn s počtem stěn f, vrcholů v a hran e.*

Poznámka. Pokud bychom opět zabrousili do teorie grafů, tak zjistíme, že platí následující věta. Pro libovolný vrcholově 3-souvislý rovinný graf G (tj. graf, který po vymazání libovolných 2 vrcholů zůstává souvislý) existuje konvexní mnohostěn, jehož grafem je právě G.

Klíčová slova. mnohostěn, Eulerova formule, Steinitzova věta, dualita, platónská tělesa, deltaedry, archimédovská tělesa, romboedry

Definice. (Dualita) Dualitou nazýváme vlastnost mnohostěnů, že každému z nich odpovídá jeden *duální mnohostěn*, který má vrcholy na místě stěn mnohostěnu původního, podobně stěny místo vrcholů, počet hran se nemění.

Příklad. Dokažte, že platí:

(1) Každý mnohostěn obsahuje aspoň jednu stěnu s méně než šesti vrcholy.
(2) $f \leq 2v - 4$.
(3) $v \leq 2f - 4$.
(4) $e \leq 3v - 6$.
(5) V každém mnohostěnu existuje aspoň jeden vrchol, v němž se stýká méně než šest hran.

Pravidelné mnohostěny

Definice. (Pravidelný mnohostěn) *Pravidelný mnohostěn* je mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné p-úhelníky ($p \geq 3$), takový, že v každém vrcholu se stýká stejný počet q ($q \geq 3$) hran a stěn. Takovéto mnohostěny, které jsou navíc konvexní nazýváme též *platónská tělesa*.

Poznámka. Podmínku o stejném počtu hran a stěn z předchozí definice můžeme nahradit jednou z následujících ekvivalentních podmínek

(1) všechny jeho vrcholy leží na jedné sféře,
(2) všechny jeho sousední stěny svírají stejný úhel,
(3) všechny prostorové úhly tvořené vrcholem a stěnami k němu přilehlými jsou shodné.

Poznámka. (Rovnice pro platónská tělesa) Vyjděme z podmínky pro počet stěn sousedních s každým vrcholem a označme p počet stran každé stěny, q počet hran stýkajících se v jednom vrcholu. Pak z Eulerovy formule vyplývá vztah

$$E = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}.$$

Lemma. *Platónských těles je pouze pět. Pravidelný čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.*

Poznámka. (Dualita) Můžeme si všimnout duality mezi krychlí a osmistěnem a mezi dvanáctistěnem a dvacetistěnem. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě. Projevem této duality je i to, že středy stran každého pravidelného mnohostěnu určují pravidelný mnohostěn duální.

Polopravidelné mnohostěny

V definici pravidelného mnohostěnu požadujeme, aby jeho stěny byly navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a všechny vrcholy měly stejnou *valenci* – počet hran/stěn z něj vycházejících. Budou-li nadále všechny stěny konvexního mnohostěnu pravidelné mnohoúhelníky, můžeme pravidelnost porušit dvěma způsoby. Buď dovolíme různou valenci vrcholů nebo použití vícerých typů mnohostěnů.

Definice. (Deltaedry) *Deltaedry* jsou tělesa, jejichž stěny jsou navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky. Nemusí splňovat např. podmínku stejného počtu stěn kolem každého vrcholu.

Konvexních deltaedrů je 8, 3 z nich jsou platónská tělesa. Deltaedry vyhovují „intuitivním“ kritériím platónských těles, ale nesplňují žádnou z uvedených dodatečných podmínek.

Definice. (Archimédovská tělesa) *Archimédovská tělesa* jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou ne nutně stejné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž vrcholy jsou rovnocenné, tj. žádné dva vrcholy nejdou odlišit.

Archimédovských těles je 13 (platónská tělesa ani hranoly a antihranoly za ně nepovažujeme), největší z nich má 96 stěn. Každé archimédovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje.

Pokud nebudeme požadovat rovnocennost vrcholů, stoupne počet vyhovujících těles na 75, nepočítaje v tom hranoly a antihranoly, jichž je nekonečně mnoho.

Uvažujme dále tělesa, jejichž stěny jsou shodné, ale ne nutně pravidelné mnohoúhelníky. Máme dvě možnosti.

Definice. (Romboedry) Stěny *romboedrů* tvoří shodné kosočtverce, jejichž délky úhlopříček jsou v poměru $1 : \sqrt{2}$.

Existují dva pravidelné romboedry – dvanáctistěn a čtyřiadvacetistěn.

Definice. (Nastavovaná platónská tělesa) Na každé stěně tělesa vztyčíme pravidelný jehlan, jehož základnou je původní stěna platónského tělesa.

Protože výška oněch jehlanů může být libovolná, můžeme přidat ještě jednu omezující podmínku navíc. Jedna možnost je požadovat, aby stěny byly rovnostranné trojúhelníky, druhá možnost je požadovat stejné konvexní úhly mezi stěnami. Druhá z nich je výhodnější v tom, že výsledné těleso zůstává vždy konvexní, tedy na něj můžeme rekurzivně použít stejný postup a tvořit pseudopravidelné mnohostěny o $9 \cdot 3^n$, $24 \cdot 3^n$ a $60 \cdot 3^n$ trojúhelníkových stěnách.

Literatura a zajímavé odkazy

[1] Robert Káldy, *Pravidelné mnohostěny aneb o hledání dokonalosti*, Valdek 2000,

[2] Michal Hroch, *Pravidelná tělesa*, Olšanka 2006,

[3] *http://www.korthalsaltes.com/* (stránka věnovaná mnohostěnům a mnohému dalšímu)