Pravidelné mnohostěny aneb o hledání dokonalosti

Robert Káldy

O mnohostěnech obecně

Definice. (Co je to vlastně mnohostěn)
Mnohostěn je konečná množina mnohoúhelníků, v níž platí:

(1) *Mnohoúhelníky se stýkají pouze na stranách nebo ve vrcholech.*
(2) *Každá strana mnohoúhelníka se stýká s právě jednou stranou jiného mnohoúhelníka.*
(3) *Pro každé dva mnohoúhelníky existuje cesta mezi jejimi vnitřky.*
(4) *Pro každý vrchol V platí, že existuje cesta mezi vnitřky stěn k vrcholu V přilehlých taková, že neprochází vrcholem V.*

Lemma. (Eulerova formule) $V + F = E + 2$, *kde V je počet vrcholů (vertices), F počet stěn (faces) a E počet hran (edges).*

Lemma. (Další podmínky pro existenci mnohostěnu) $2E \geq 3F$, $2E \geq 3V$.

Cvičení. Dokažte, že platí:

(1) Každý mnohostěn obsahuje aspoň jednu stěnu s méně než šesti vrcholy.
(2) Neexistuje sedmistěn.
(3) $F \leq 2V - 4$.
(4) $V \leq 2F - 4$.
(5) $E \leq 3V - 6$.
(6) V každém mnohostěnu existuje aspoň jeden vrchol, v němž se stýká méně než šest hran.

Cvičení. Označíme-li F_p počet stěn s p stranami, dokažte, že platí:

(1) $F_4 = F_5 = 0 \Rightarrow F_3 \geq 4$.
(2) $F_3 = F_5 = 0 \Rightarrow F_4 \geq 6$.
(3) $F_3 = F_4 = 0 \Rightarrow F_5 \geq 12$.

Pravidelné mnohostěny

Definice. (Platónská tělesa) *Mnohostěn je platónské těleso, jestliže jeho stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky o stejném počtu stran a navíc splňuje jednu z následujících podmínek:*

(1) *má kouli opsanou*
(2) *všechny jeho sousední stěny svírají stejný úhel*
(3) *všechny prostorové úhly tvořené vrcholem a stěnami k němu přilehlými jsou shodné*
(4) *ke každému vrcholu přiléhá stejný počet stěn*

Pozorování. (Rovnice pro platónská tělesa) Vyjděme z podmínky (4) a označme p počet stran každé stěny, q počet hran stýkajících se v jednom vrcholu. Pak z Eulerovy formule vyplývá:

$$E = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}.$$

Pozorování. (Petrieho plástve) Vyhovují výše uvedené definici platónských těles, ale nejsou to mnohostěny, neboť mají nekonečný počet stěn. Všimněte si, že „vnějšek“ těles je shodný s tělesem samotným, tedy stěny Petrieho pláství rozdělují prostor na dvě shodné části.

Více a méně pravidelné mnohostěny

Definice. (Deltaedry) *Deltaedry jsou tělesa, jejichž stěny jsou navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky. Nemusí splňovat např. podmínku stejného počtu stěn kolem každého vrcholu.*

Konvexních deltaedrů je 8, 3 z nich jsou platónská tělesa. Deltaedry vyhovují „intuitivním“ kritériím platónských těles, ale nesplňují žádnou z uvedených dodatečných podmínek.

Definice. (Archimedovská tělesa) *Archimédovská tělesa jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou ne nutně stejné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž vrcholy jsou rovnocenné, tj. žádné dva vrcholy nejdou odlišit.*

Archimedovských těles je 13, největší z nich má 96 stěn. Každé archimedovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje.

Pokud nebudeme požadovat rovnocennost vrcholů, stoupne počet vyhovujících těles 75, nepočítaje v tom hranoly a antihranoly, jichž je nekonečně mnoho.

Definice. (Izomerie) *Dva různé mnohostěny jsou izomerní, jestliže mají stejný počet stěn každého typu.*

Uvažujme dále tělesa, jejichž stěny jsou shodné, ale ne nutně pravidelné mnohoúhelníky. Máme dvě možnosti.

Definice. (Romboedry) *Stěny romboedrů tvoří shodné kosočtverce, jejichž délky úhlopříček jsou v poměru* $1 : \sqrt{2}$.

Existují dva pravidelné romboedry — dvanáctistěn a čtyřiadvacetistěn.

Definice. (Nastavovaná platónská tělesa) *Na každé stěně tělesa vztyčíme pravidelný jehlan, jehož základnou je původní stěna platónského tělesa.*

Protože výška oněch jehlanů může být libovolná, můžeme přidat ještě jednu omezující podmínku navíc. Jedna možnost je požadovat, aby stěny byly rovnostranné trojúhelníky, druhá možnost je požadovat stejné konvexní úhly mezi stěnami. Druhá možnost je výhodnější v tom, že výsledné těleso je vždy konvexní, tedy na něj můžeme rekurzivně použít stejný postup a tvořit pseudopravidelné mnohostěny o $9 \cdot 3^n$, $24 \cdot 3^n$ a $60 \cdot 3^n$ trojúhelníkových stěnách.

Cvičení. Vstyčíme-li na stěnách pravidelného osmistěnu jehlan vyhovující prvnímu požadavku (tj. pravidelný čtyřstěn), vznikne těleso nazývané *Keplerova hvězda*. Tento mnohostěn je tvořen dvěma pravidelnými čtyřstěny, jejichž hrany se protínají ve svém středu. Ukažte, že vrcholy „cípů“ hvězdy leží ve vrcholech krychle.