Pravděpodobnostní metoda

Martin Töpfer

Abstrakt. Pravděpodobnostní metoda je způsob důkazu existence kombinatorických objektů „počítáním“. Navíc pro mnoho důležitých objektů je to jediný známý důkaz. Použití pravděpodobnosti nám oproti počítání možností nejen výpočet zjednodušší, ale poskytne nám i pokročilejší techniky, jak potřebné odhady dokázat.

Pravděpodobnostní metodu používáme hlavně na důkaz existence nějakých matematických objektů. Místo snahy o konstrukci (která mnohdy ani není známá) se pokusíme najít nějaký postup využívající pravděpodobnost, o kterém dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností uspěje. Z toho již nutně vyplývá existence hledaného objektu.

Definice. *Elementárním jevem* nazýváme kompletní situaci, která nastala po náhodném procesu, tedy například „Na první kostce padla trojka, na druhé dvojka a na třetí trojka.“ *Jevem* pak nazýváme nějakou vlastnost takové situace, například „Na první kostce padlo sudé číslo.“ Pravděpodobnost, že jev A nastal značíme $P(A)$. Symbolem $A \cap B$ značíme, že nastal jev A a současně nastal jev B, a $A \cup B$ značí, že nastal jev A nebo nastal jev B. *Nezávislé jevy* jsou takové, pro které platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Tvrzení. (Union bound) *Nechť $A_1, A_2, \dots A_n$ jsou jevy (nemusí být nezávislé). Pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Příklad 1. V jazykové škole se vyučuje $2n$ jazyků. Každý z 500 místních učitelů umí mluvit alespoň n jazyky. Dokažte, že najdeme 14 nebo méně jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Řešení. Zvolme si náhodnou 14-tici jazyků (uspořádanou, jazyky se můžou opakovat) a pevného učitele. Pravděpodobnost, že tento učitel nezná první jazyk, je nejvýše 1/2, stejně tak u druhého jazyku, atd. Celkem je tedy pravděpodobnost, že tento učitel nezná ani jeden ze 14 jazyků, rovna 2^{-14}. Za pomoci tvrzení výše získáváme, že pravděpodobnost, že alespoň jeden učitel nezná ani jeden z těchto 14 jazyků, je nejvýše $500 \cdot 2^{-14}$. Tedy pravděpodobnost, že všichni učitelé znají alespoň jeden z těchto 14 jazyků, je $1 - (500 \cdot 2^{-14}) > 0$. A nyní přichází klíčová myšlenka pravděpodobnostní metody: Má-li jev nenulovou pravděpodobnost, může nastat. Tedy opravdu existuje 14-tice jazyků taková, že každý učitel mluví alespoň jedním z nich.

Příklad 2. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla m, n. Jaký je počet cest po mřížce v obdélníku $m \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou jen doprava a nahoru a jsou celé pod úhlopříčkou? (MKS 26–5)

Příklad 3. Ve skupině 90 dětí má každé alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že lze děti rozdělit do tří 30-členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince alespoň jednoho kamaráda. (MO 61–III)

Příklad 4. Matematické soutěže se účastnilo 200 studentů, každý z nich řešil šest úloh. Je známo, že každou úlohu správně vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokažte, že můžeme najít dva studenty, kteří dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Příklad 5. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby neexistovala jednobarevná desetiprvková aritmetická posloupnost. (IMO 1987)

Příklad 6. V rovině je dáno 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že počet ostroúhlých trojúhelníků nepřekračuje 70% počtu všech trojúhelníků. (IMO 1970)

Příklad 7. (Dolní odhad na Ramseyova čísla) Dokažte, že hrany úplného grafu na $2^{k/2}$ vrcholech je možné obarvit dvěma barvami tak, aby v nich nebyl žádný úplný jednobarevný podgraf na k vrcholech.

Příklad 8. V tabulce 100×100 jsou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 5000$, každé právě dvakrát. Dokažte, že je možné vybrat 100 čísel tak, že z každého sloupce a z každého řádku vybereme právě jedno číslo, a navíc budou tato čísla různá.

Střední hodnota

Definice. *Náhodná veličina* je reálné číslo, které spočteme na základě elementárního jevu, tedy například „číslo, které padlo na první kostce“ nebo „počet kostek, na kterých padla trojka“.

Definice. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je její průměrná hodnota a značí se $E(X)$. Přesněji je $E(X)$ vážený aritmetický průměr přes všechny hodnoty X na elementárních jevech, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto jevů.

Tvrzení. (Počítání střední hodnoty)

(1) *Buď A jev a I_A náhodná veličina, která dává nulu resp. jedničku, pokud A nastal resp. nenastal. Pak $E(I_A) = P(A)$.*

(2) *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, pak $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

(3) *Nechť X je náhodná veličina a r reálné číslo, pak $E(r \cdot X) = r \cdot E(X)$.*

Pozor! Další zobecnění tohoto tvrzení, jako například $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, již obecně neplatí.

Tvrzení 9. (použití střední hodnoty) *Buď X náhodná veličina. Pak existuje elementární jev, na kterém $X \leq E(X)$, a také jiný elementární jev, na kterém $X \geq E(X)$.*

Příklad 10. Nechť F je množina všech n-tic $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, kde každé A_i je podmnožinou $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Označme $|A|$ počet prvků množiny A. Najděte hodnotu

$$\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n)} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

(APMO 1998)

Příklad 11. V šachovém turnaji, kterého se zúčastnilo 40 hráčů, se odehrálo celkem 80 partií, přičemž žádná dvojice spolu nehrála víckrát. Ukažte pro co největší n, že existuje n hráčů, kteří mezi sebou nesehráli žádný zápas.

Příklad 12. V soutěži je a soutěžících a b porotců, kde $b \geq 3$ je liché číslo. Každý porotce hodnotí každého soutěžícího buď jako „dobrý“, nebo jako „špatný“. Předpokládejme, že k je takové číslo, že pro libovolnou dvojici porotců se jejich hlasy shodovaly u nejvýše k soutěžících. Dokažte nerovnost $k/a \geq (b-1)/(2b)$.

(IMO 1998)

Příklad 13. V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. Hamiltonovská cesta je takové uspořádání n hráčů, že první porazil druhého, druhý třetího, ... Dokažte, že turnaj mohl dopadnout tak, že existovalo alespoň $n!/2^{n-1}$ hamiltonovských cest.

Příklad 14. Na večírku je $n \geq 2$ lidí, někteří se znají[1]. Dokažte, že existují dva lidé A, B takoví, že mezi zbylými $n-2$ najdeme $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ lidí, kteří mají stejný vztah k A i k B.

Příklad 15. Mějme graf G s n vrcholy a $m \geq 4n$ hranami. Dokažte, že kdykoli takový graf nakreslíme do roviny, bude obsahovat alespoň $m^3/(64n^2)$ průsečíků.

Literatura a zdroje

[1] Mirek Olšák: *Od Dirichleta k pravděpodobnosti*, sborník *i*KS 2012
[2] Law Ka Ho: *Probabilistic Method*, Mathematical Excalibur, 2009
[3] Sourav Chakraborty: *Probabilistic method*, lecture notes

[1] Vztah znát se je vzájemný.