Pravděpodobnostní paradoxy

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek obsahuje překvapivé úlohy z pravděpodobnosti.

Paradox 1. David každý víkend jezdí z Plzeňského nádraží buď za manželkou do Dobřan, nebo za milenkou do Rokycan. Rozhoduje se náhodně – vždy nastoupí do prvního vlaku, který jede. Ačkoli vlaky do Rokycan jezdí stejně často jako vlaky do Dobřan, po nějakém čase David shledal, že byl u milenky dvakrát častěji než u manželky. Jak je to možné?

Paradox 2. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru?

Paradox 3. Do stomístného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Paradox 4. (Monty Hall) Ve finále televizní soutěže je za dvěma dveřmi koza a za třetími auto, přičemž soutěžící chce auto. Postaví se tedy k jedněm dveřím, načež moderátor otevře jedny dveře, za kterými je koza – jiné než ty, ke kterým se soutěžící postavil – a pak dá soutěžícímu možnost ještě svou volbu dveří změnit. Vyplatí se soutěžícímu volbu změnit?

Paradox 5. Pravděpodobnost, že se narodí děvče, je stejná jako pravděpodobnost, že se narodí chlapec.

(i) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, v níž je první narozené dítě děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé narozené dítě je také děvče?

(ii) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, z nichž je alespoň jedno děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?

(iii) Uvažme náhodnou rodinu s dvěma dětmi, z nichž je alespoň jedno děvče se jménem Xénie. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je opět děvče?

Paradox 6. Přišli jsme na test jisté vzácné choroby vyskytující se u setiny populace. Měřil nás přístroj, který v 90 % případů odpoví správně (ve zbylých chybně), a nahlásil, že onou chorobou trpíme. Jaká je pravděpodobnost, že tomu tak skutečně je?

Paradox 7. (Simsonův) Lukáš a Pepa mají oba svůj žlutý a modrý sáček a v nich černé a bílé kuličky. Pokud Lukáš sáhne do svého žlutého sáčku, má vyšší pravděpodobnost vytažení bílé kuličky, než kdyby sáhnul do modrého. Totéž platí pro Pepu. Přesto se může stát, že smícháme-li kuličky ve žlutých a v modrých sáčcích, bude vyšší šance na vytáhnutí bílé kuličky u modrého sáčku.

Paradox 8. V $n-1$ vrcholech pravidelného n-úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný (jeden ze dvou) sousední vrchol a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlk se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n-2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Jaká ovce má nejvyšší šanci na přežití?

Paradox 9. Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón vytáhne a sní – každý další bonbón vždy vytáhne, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snězeným bonbónem bude karamelka? (MKS 32–7–6)

Paradox 10. Deseti zvoleným ministrům byly náhodně rozdány ministerské resorty (těch je také 10). Každý ministr zajde za králem, který posty rozdal, a musí si tipnout, který post má – konverzace probíhá stylem:
Ministr: „Zemědělství.“
Král: „Ne, zemědělství má Jánošík.“
Ministr: „Tak administrativní záležitosti.“
Král: „Ne, administrativní záležitosti má Jim Hacker.“
...
Ministři se mohou domlouvat pouze před zkouškou a jako celek uspějí jen, když každý tipne svůj resort nejhůře na sedmý pokus. Přesto se dokáží dohodnout tak, aby měli nadpoloviční šanci uspět. (Projev před ÚKMO 2014)

Paradox 11. Je nám nabídnuta následující hra: Zaplatíme 1000 Kč, pak házíme mincí tak dlouho, dokud nám padá panna, a následně vyhrajeme 2^{n-1} Kč, kde n je počet námi provedených hodů. Vyplatí se nám tuto hru podstoupit?

Náhoda je prevít, nedá se ošálit

Paradox 12. V zaškrtávácím testu můžeme na každou z pěti otázek odpovědět jedním z písmen A, B, C, D, E. Za test dostaneme tolik bodů, na kolik otázek odpovíme správně. Doslechneme-li se, že každé písmeno je použito právě jednou, vyplatí se nám dávat takové tipy, kde je každé písmeno právě jednou?

Paradox 13. Hrajeme jistou hazardní hru. Začínáme s 1000 Kč, vždy vsadíme nějakou částku (nejvýše tolik, kolik právě máme) a následně ji s pravděpodobností 1/2 vyhrajeme a v opačném případě prohrajeme. K takové hře je možné přistupovat s rozličnými strategiemi:

(i) V každém kroku vsadíme 200 Kč.
(ii) V každém kroku vsadíme polovinu částky, kterou máme.
(iii) (Martingale) Po každé prohře vsadíme dvojnásobek minulé sázky. V opačném případě, nebo pokud to není možné, vsadíme jednu korunu.

Při které z nabízených strategií máme nejvyšší šanci dosáhnout částky 3000 Kč?

Paradox 14. Jirka a Marek hrají svou verzi tenisu. Když podává Marek, má šanci 0,5 vyhrát míček, a když podává Jirka, má pravděpodobnost 0,6 vyhrát míček. Hraje se do 21 vítězných bodů (bez prodlužování). Marek, který je slabší, podává jako první, a navíc si může vybrat způsob, jak se budou střídat podání, z následujících možností:

(i) Podání se střídá pravidelně.
(ii) Podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček.
(iii) Podává vždy ten, kdo naposled prohrál míček.

Která volba je pro Marka nejvýhodnější?

Občas je to prostě podvod

Paradox 15. V jedné obálce je 100 Kč a v druhé 200 Kč. Vybereme si náhodnou, zatím neotvíráme. Neznámé množství peněz v ní označíme x. V druhé obálce je tak náhodně buď $2x$ nebo $0{,}5x$. Průměrně je proto v druhé obálce $1{,}25x$, a proto se nám vyplatí volbu obálky změnit.

Paradox 16. (Bertrandův) Pravděpodobnost, že náhodná tětiva kružnice opsané danému rovnostrannému trojúhelníku je delší než jeho strana, je rovna 1/2, 1/3 a také 1/4.

Paradox 17. Za předpokladu hypotézy kontinua je možné uspořádat všechna reálná čísla tak, že pod každým reálným číslem je v tomto obskurním uspořádání U pouze spočetně dalších čísel. Uvažme nyní hru dvou hráčů, kdy oba hráči zvolí náhodné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$ a vítězí ten, který zvolí vyšší číslo v uspořádání U. Pak kdykoli jeden hráč zvolí své číslo, druhý hráč zvolí vyšší s pravděpodobností 1.