Pravděpodobnostní metoda

Míša Prokešová

V teorii grafů a diskrétní matematice vůbec se často vyskytují nekonstruktivní důkazy existence, které by se daly nazvat důkazy počítáním. Používají se pro tvrzení typu: v dané množině objektů existuje nějaký objekt speciálních vlastností (např. graf s více než $\frac{3}{2}n^2$ hranami obsahuje trojúhelník jako podgraf). Důkaz probíhá tak, že spočítáme všechny objekty a odhadneme seshora počet objektů nesplňujících podmínky věty (budeme jim pracovně říkat špatné objekty). Když je počet všech objektů větší než počet špatných, musí zřejmě existovat aspoň jeden dobrý objekt. Tuto argumentaci lze snadno převést do řeči pravděpodobnosti: náhodně volíme objekt z dané množiny a ukážeme, že je s nenulovou pravděpodobností dobrý, pak musí v množině existovat dobrý objekt (v našem příkladu náhodně volíme trojici vrcholů grafu a dokazujeme, že s nenulovou pravděpodobností graf obsahuje všechny tři hrany na těchto vrcholech). V našem příkladě je jedno, jestli objekty spočítáme nebo budeme dokazovat pomocí pravděpodobnosti, ale u složitějších tvrzení je důkaz pomocí pravděpodobnosti mnohem přehlednější a můžeme využít dalších metod, které by při počítání objektů byly moc těžkopádné.

Základní definice z teorie pravděpodobnosti, které potřebujeme :

Definice : *Konečným pravděpodobnostním prostorem* nazveme dvojici (Ω, P), kde Ω je konečná množina a P je funkce přiřazující každé podmnožině Ω číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, splňující

$$P(\emptyset) = 0 \quad \& \quad P(\Omega) = 1 \quad \& \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pro každé dvě množiny A,B mající prázdný průnik.

(Prvky množiny Ω, kterým říkáme elementární jevy, si můžeme představit třeba jako všechny možné výsledky nějakého náhodného pokusu.)

Definice : Dva jevy A a B z pravděpodobnostního prostoru nazveme *nezávislé*, pokud platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definice : *Náhodná veličina* je zobrazení f přiřazující každému prvku $\omega \in \Omega$ reálné číslo $f(\omega)$.

(Při házení kostkou může být náhodná veličina např. počet ok, která padla.)

Definice : *Střední hodnota Ef* náhodné veličiny f je reálné číslo $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)f(\omega)$. Tj. vezmeme hodnoty, kterých nabývá náhodná veličina při jednotlivých elementárních jevech, vynásobíme je pravděpodobnostmi a sečteme.

(Jak už název napovídá, pokud bychom dělali velký počet pokusů a počítali průměrnou hodnotu, vyšlo by nám přibližně toto číslo.)

Definice : Buď $A \subseteq \Omega$ jev v nějakém pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). *Indikátor jevu* A je náhodná veličina I_A z Ω do $\{0,1\}$ definovaná $I_A = 1$ pro $\omega \in A$ a $I_A = 0$ pro $\omega \notin A$.
(Indikátor je 1, když nastal jev A, resp. 0, když nenastal.)

Z tvrzení teorie pravděpodobnosti použijeme jen dvě pozorování :

1) střední hodnota je lineární, tj. pro dvě náhodné veličiny f,g na konečném pravděpodobnostním prostoru a pro reálné číslo c platí

$$E(f+g) = Ef + Eg \quad \& \quad E(c \cdot f) = c \cdot Ef$$

2) pro každý jev A je $EI_A = P(A)$

Vybaveni těmito znalostmi můžeme elegantně dokázat např. následující :

Turánova věta (jedno z jejích znění) : *Graf na n vrcholech neobsahující K_k jako svůj podgraf má nejvýše $\frac{n^2}{4} \cdot \frac{k-1}{k}$ hran.*
(K_k je úplný graf na k vrcholech.)

Jedno hezké tvrzení z teorie čísel : *Mějme B konečnou množinu přirozených čísel. Pak v ní existuje podmnožina A bez součtů (neobsahující součet žádných dvou svých prvků), pro jejíž velikost platí*

$$|A| > \frac{1}{3} \cdot |B|$$

Několik tvrzení o 2-obarvitelnosti systémů množin

(Systém množin na množině X, kde X je konečná, je soubor podmnožin množiny X a je 2-obarvitelný, pokud můžeme přiřadit každému prvku množiny X jednu ze dvou barev tak, že žádná z množin systému není jednobarevná.)