Pravděpodobnostní metoda

Libor Barto — 31. ledna 2001

Základy teorie pravděpobnosti

Definice.

- *Pravděpodobnostním prostorem* budeme rozumět libovolnou konečnou množinu Ω.
- Podmnožiny Ω nazýváme *jevy*. Jednoprvkovým množinám říkáme *elementární jevy*. (Jsou to vlastně množiny $\{\omega\}$, kde $\omega \in \Omega$. Někdy budeme prvku ω říkat elementární jev a budeme tím myslet elementární jev $\{\omega\}$.)
- Prázdná množina je *nemožný jev*. Množina Ω se nazývá *jistý jev*.
- Pokud $A \subseteq B$, říkáme, že *A je podjevem jevu B*.
- Jev $\Omega \setminus A$ se nazývá *opačný jev* a značí se A^c.
- Pokud $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že jevy A a B se vylučují.

Definice. Mějme zobrazení p, které každému elementárnímu jevu přiřadí nezáporné číslo, přičemž platí:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1\,.$$

Definujeme zobrazení, které libovolnému jevu A přiřadí

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)\,.$$

Zobrazení P se nazývá *pravděpodobnost*.

Věta. Nechť A, B jsou jevy. Potom

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Pokud A je podjev B, pak $P(A) \leq P(B)$, navíc $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Definice. Jevy A, B nazýváme *nezávislé*, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Pokud $P(B) > 0$, definujeme *podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B* vztahem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Věta.

- Jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i jevy A^c, B.
- Je-li $P(B) > 0$, pak jsou jevy A, B nezávislé právě když $P(A|B) = P(A)$.
- Je-li $P(B) > 0$, pak $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
- Je-li $P(A), P(B) > 0$, pak $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.
- Je-li $P(B) > 0$, pak $P(A \cap B|B) = P(A|B)$.
- Jsou-li jevy $A_1, \ldots, A_n$ vzájemně se vylučující, pak

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n|B) = P(A_1|B) + \cdots + P(A_n|B).$$

- Jsou-li jevy $B_1, \ldots, B_n$ vzájemně se vylučující a jejich sjednocením je jev jistý, pak

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$$

Definice.

- Zobrazení X, které každému elementárnímu jevu přiřadí reálné číslo, nazýváme *náhodná veličina*. Jev $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 3\}$ píšeme zkráceně $(X < 3)$ apod.
- Sčítání a násobení náhodných veličin konstantou a sčítání náhodných veličin definujeme přirozeně takto:

$$\begin{aligned} a+X: &\quad (a+X)(\omega) = a + X(\omega), \\ aX: &\quad (aX)(\omega) = a \cdot X(\omega), \\ X+Y: &\quad (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega). \end{aligned}$$

- Řekneme, že náhodné veličiny X, Y jsou *nezávislé*, pokud jevy $X = a$ a $Y = b$ jsou nezávislé pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.
- *Střední hodnotou* náhodné veličiny X rozumíme číslo

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)\,.$$

- *Indikátorem* jevu A rozumíme náhodnou veličinu I_A, definovanou takto:

$$\begin{aligned} I_A(\omega) &= 1, \quad \text{pokud } \omega \in A, \\ I_A(\omega) &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X_i jsou náhodné veličiny, potom

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$
- $E(I_A) = P(A)$
- Jsou-li X, Y nezávislé, pak $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Pokud X nabývá hodnot $a_1, \ldots, a_n$, pak

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i)\,.$$

- Existují elementární jevy ω_1, ω_2, pro něž $X(\omega_1) \geq E(X)$ a $X(\omega_2) \leq E(X)$.

Pravděpodobnostní metoda

Teorie pravděpodobnosti umožňuje často řešit i příklady, které nemají na první pohled (často ani na druhý, ...) co do činění s pravděpodobností. My budeme teorie používat v následujících případech:

- Nějaký vzoreček interpretujeme jako pravděpodobnost něčeho. Jednoduché vztahy nám potom dají pěkný výsledek.
- Chceme o nějaké skupině objektů dokázat, že v něm existuje jistý „dobrý“ objekt. K tomu ovšem stačí dokázat, že náhodně zvolený objekt z dané skupiny je „dobrý“ s pravděpodobností větší než 0.
- Opět máme skupinu objektů a ke každému objektu je přiřazeno jisté ohodnocení (náhodná veličina). Např. objekty jsou grafy, každému grafu přiřadíme počet jeho hran. Chceme zjistit, zda skupina obsahuje objekt, jehož ohodnocení je alespoň (resp. nejvíce) x. K tomu nám podle poslední věty stačí zjistit, že střední hodnota je alespoň x (resp. nejvíce x).

Příklady

1. příklad** Nechť x je reálné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$, m, n jsou přirozená čísla. Potom platí:

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geq 1\,.$$

2. příklad** Označme $R(k,l)$ nejmenší číslo takové, že každý graf s alespoň $R(k,l)$ vrcholy obsahuje buď k vrcholů, z nichž jsou každé dva spojeny, nebo l vrcholů, z nichž žádné dva spojeny nejsou. Potom $R(k,k) > 2^{k/2}$.

3. příklad** Každý graf s m hranami obsahuje bipartitní podgraf s nejméně $m/2$ hranami. (Bipartní graf je graf rozdělený na dvě skupiny vrcholů, kde hrany vedou pouze mezi těmito skupinami, ale ne uvnitř.)

4. příklad** Nechť G je graf s v vrcholy a $\frac{nd}{2}$ hranami ($d \geq 1$). Potom $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$, kde $\alpha(G)$ je tzv. nezávislost grafu G, tj. maximální velikost množiny vrcholů grafu G, z nichž nejsou žádné dva spojeny.

5. příklad** Nechť m je přirozené číslo. Potom

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}}.$$

6. příklad** Každá množina n nenulových celých čísel obsahuje krásnou podmožinu, která má nejméně $n/3$ prvků. Množině A říkáme krásná, pokud z $a, b \in A$ plyne $a + b \notin A$.

7. příklad** Máme turnaj, jehož se zúčastnilo n hráčů, každý král s každým, remízy nebyly. Dokažte, že mohl skončit tak, že v turnaji existovalo nejméně $n!\,2^{-(n-1)}$ podivností. Podivností rozumíme takovou permutaci $X_1, \ldots, X_n$ účastníků turnaje, že X_1 porazil X_2, X_2 porazil X_3, …, X_{n-1} porazil X_n a X_n porazil X_1.

8. příklad** Hrany úplného grafu lze obarvit dvěma barvami tak, že tento graf obsahuje nanejvýše $\binom{n}{a}\,2^{1-\binom{a}{2}}$ jednobarevných podgrafů s a vrcholy.