Povídání o matematice

Víťa Kala

Matematika je výplodem chorých mozků.
—Prof. RNDr. Tomáš Kepka, DrSc.

Na přednášce si budeme povídat o tom, proč vlastně matematika vypadá tak, jak vypadá. V tomto příspěvku rozhodně není zachycen obsah přednášky a nejdůležitější myšlenky v ní obsažené, ale jen uvedeno matematické tvrzení, které na přednášce použijeme jako ilustrační příklad.[3]

Věta. (o pevném bodu) *Nechť je $f : [0,1] \to [0,1]$ spojitá funkce. Pak má f aspoň jeden pevný bod, tedy existuje $x \in [0,1]$ takové, že $f(x) = x$.*

Jak uvidíme na přednášce, toto tvrzení je téměř zřejmé a dá se dokázat jedním obrázkem. Je ale takový obrázek korektním důkazem? Co to vlastně znamená, že funkce je spojitá? Aby o tom matematici mohli nějak pořádně mluvit, vymysleli spoustu divných nových pojmů a nepochopitelných definic známých věcí:[4]

Definice. (spojitá funkce) *Nechť je $f : [0,1] \to [0,1]$ funkce. Tuto funkci nazveme* spojitou, *jestliže $\forall x \in [0,1] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in (x-\delta, x+\delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*[5]

Definice. (supremum a infimum množiny) *Buď M neprázdná množina reálných čísel. Nejmenší číslo s (reálné nebo nekonečno) takové, že $\forall x \in M : s \geq x$ nazveme* supremem M. *Obdobně největší číslo i (reálné nebo minus nekonečno) takové, že $\forall x \in M : i \leq x$ nazveme* infimem M.[6]

Věta. *Každá neprázdná množina má supremum a infimum.*

Víc ošklivých pojmů bychom na přednášce potřebovat neměli, tak se rozloučíme a na dobrou noc si povíme pár příkladů, které s přednáškou sice opět vůbec nesouvisí, ale vyskytují se v nich spojitost a supremum a infimum. Nenech se moc znechutit neúspěchy snahy o jejich vyřešení. Pro někoho, kdo se s těmito pojmy potkává poprvé, mohou tyto příklady být dost těžké.

[3] A kromě tohoto tvrzení je v příspěvku spousta poznámek pod čarou, skoro víc než normálního textu (:

[4] Ty definice jsou FAKT divné, vůbec se tedy nenech znepokojit tím, že jim vůbec nerozumíš – já také ne (; Na přednášce si vše důležité důkladně vysvětlíme a nedůležité pečlivě vynecháme.

[5] To je síla, co? (:

[6] Když si člověk definici trošku rozmyslí, může si všimnout, že supremum a infimum jsou v podstatě jen zobecněním obvyklých a známých pojmů maximum a minimum. Problém je, že zatímco spousta množin maximum nebo minimum nemá, supremum a infimum existuje vždy.

Příklad 1. (Darbouxova vlastnost spojité funkce) Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, která v nějakém bodě nabývá hodnotu a a v nějakém hodnotu b (a¡b). Dokaž, že pro každé $y \in (a, b)$ existuje x takové, že $f(x) = y$.

Příklad 2. Dokaž, že každá neprázdná množina má supremum a infimum.

Příklad 3. (Ještě těžší než ostatní příklady) Nechť je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkce. Dokaž, že tato funkce nabývá maxima, tedy že $\exists x \in [0, 1] \forall y \in [0, 1] : f(x) \geq f(y)$.