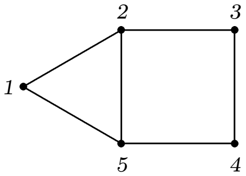
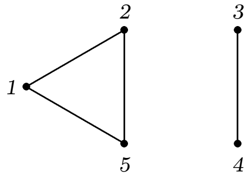
Použití potrubí v teorii grafů

Standa Hencl



Graf č. 1



Graf č. 2

Omluvy předem : *Definice raději uvádím v názorné podobě než matematicky precizně. Veškeré tyto definice a znění vět se krásně vysvětlí na obrázku a to jde v textové podobě velmi špatně.*

Definice 1: *Graf* G je zadán množinou *vrcholů* V (na obrázku $\{1,2,3,4,5\}$) a množinou *hran* E, tj. čar spojujících dvojici vrcholů (v Grafu č. 1 jsou to hrany mezi vrcholy $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{2,5\}$ a $\{1,5\}$).

Definici grafu znáte ze zadání jedné ze sérií Prasete.

Definice 2: Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy a, b z V existuje cesta spojující tyto vrcholy (tj. z vrcholu a lze dojít do vrcholu b přes hrany z E).

Graf č. 1 je souvislý (např. mezi 1 a 4 existuje cesta $\{1,2\},\{2,5\},\{5,4\}$*).*

Graf č. 2 není souvislý, neboť mezi 2 a 4 neexistuje cesta, nelze je spojit hranami tohoto grafu.

Definice 3: Buď k přirozené číslo. Graf G je *hranově* k*-souvislý*, pokud po vyhození libovolných k hran z E zůstane graf souvislý.

Graf č. 1 je hranově 1-souvislý. Po umazání libovolné jeho hrany se neustále budu moci dostat z libovolného jeho vrcholu do libovolného jiného.

Graf č. 1 není hranově 2-souvislý. Po odebrání hran $\{2,3\}$ *a* $\{5,4\}$ *dostanu Graf č. 2, který není souvislý.*

Definice 4: Buď k přirozené číslo. Graf G je *vrcholově* k*-souvislý*, pokud po vyhození libovolných k vrcholů z V a těch hran z E, na nichž tyto vrcholy ležely, zůstane graf souvislý.

Graf č. 1 je vrcholově 1-souvislý. Např. vyhodím-li vrchol č. 1 a s ním hrany $\{1,2\},\{1,5\}$*, je zbylý graf na vrcholech* $\{2,3,4,5\}$ *souvislý.*

Graf č. 1 není vrcholově 2-souvislý. Po vyhození vrcholů 3 a 5, a tedy i hran $\{3,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,1\}$, $\{5,2\}$, $\{5,4\}$, *nelze přejít od 1 k 4.*

Cílem přednášky je dokázat následující krásné věty :

Věta (Menger) : Graf G je hranově k-souvislý $\iff$ každé dva vrcholy z V lze spojit alespoň k-hranově disjunktními cestami.

Tedy oněch cest z definice souvislosti existuje alespoň k a to takových, že každá hrana z E je nejvýše v jedné z těchto cest.

Věta (Ford-Falkerson) : Graf G je vrcholově k-souvislý $\iff$ každé dva vrcholy z V lze spojit alespoň k-vrcholově disjunktními cestami.

Tedy oněch cest z definice souvislosti existuje alespoň k, a to takových, že každý vrchol z V je nejvýše v jedné z těchto cest.

A pokud zbyde ještě trochu času, tak dokážu :

Věta (Hall) : Buď $n, k \in \mathbb{N}$. Mějme množinu lidí $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Mějme různé zájmové spolky $M_1, M_2, \ldots, M_k$, tzn. $M_i \subset X$. Označme $M := \bigcup_{i=1}^{k} M_i$. Systémem různých reprezentantů *SRR* nazvu funkci $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to X$ takovou, že $f(i)$ je prvkem M_i a f je prostá (tj. funkci f, která každému spolku přiřadí jednoho jejího člena, který nebude vybrán, aby zastupoval jiný spolek).
Pak platí: SRR existuje $\iff$ pro všechny J podmnožiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ platí, že počet členů všech spolků z J je alespoň tolik, kolik je prvků J, matematicky

$$|J| \leq \left| \bigcup_{i \in J} M_i \right|$$

(tzn. že když 8 spolků má dohromady 7 lidí, tak z nich těžko vyberu 8 různých zástupců jednotlivých spolků).

Všechny tyto tři věty budu dokazovat s použitím Toků v sítích (tj. přednášky Roberta Šámala z jarního soustředění v Mariánské). Nezoufejte, všechny potřebné pojmy, definice a věty hodlám znovu připomenout, takže i těm, kteří na této přednášce nebyli, by mělo být vše jasné.