Posloupnosti alá kombinatorika

Jarda Hančl

Abstrakt. Tento příspěvek se zabývá kombinatorickými vlastnostmi posloupností, které jsou prezentovány pouze na příkladech. V první části se studují konečné posloupnosti, ve druhé části se vhodně vybírají podposloupnosti a nakonec je uvedeno několik velmi zajímavých vlastností geometrických a aritmetických posloupností.

Konečné posloupnosti

Většina úloh v této sekci bude o konečných posloupnostech, proto *Konečnou posloupností délky* n budeme rozumět každou uspořádanou n-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Příklad 1. Každé číslo v posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je buď -1 nebo 0 nebo 1. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu S všech součinů $x_i x_j$ pro $1 \le i < j \le n$.

Příklad 2. Každé číslo v posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ leží v intervalu $[-1, 1]$. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu S všech součinů $x_i x_j$ pro $1 \le i < j \le n$.

Příklad 3. Mezi $2n$ reálnými čísly $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí nerovnost

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n > y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Avšak, zaměníme-li v ní libovolnou dvojici čísel x_i a y_i, nerovnost přestane platit. Zjistěte, pro které hodnoty n je to možné.

Příklad 4. Kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňují pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n-1$ vztah $a_k \le a_{k+1} \le 2a_k$. Dokažte, že v součtu $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ umíme nastavit znaménka tak, že $0 \le S \le a_1$.

Příklad 5. Rozdíl největšího a nejmenšího z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je 1. Určete největší rozdíl mezi čísly

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ldots,\ y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Příklad 6. Součet reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven 0, přesto ale pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $x_i = 1$. Dokažte, že největší z čísel

$$|x_1 - x_2|,\ |x_2 - x_3|,\ \ldots,\ |x_{n-1} - x_n|,\ |x_n - x_1|$$

je alespoň $4/n$.

Klíčová slova. posloupnosti, kombinatorika, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost

Příklad 7. Součet členů cyklické posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven 0. Dokažte, že existuje index k takový, že všechna čísla

$$x_k,\ x_k + x_{k+1},\ \ldots,\ x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{k+n-1}$$

jsou nezáporná.

Příklad 8. Dokažte, že pro libovolnou posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálných čísel existuje index $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že platí nerovnost

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i\right| \le \max\{|x_i| : 1 \le i \le n\}.$$

Příklad 9. Součet druhých mocnin reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je roven 1. Určete největší možnou hodnotu součtu absolutních hodnot všech 2^n čísel tvaru $\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$.

Příklad 10. Pro reálná čísla $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ se součtem 0 platí $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = A$. Dokažte, že $x_n - x_1 \ge 2A/n$.

Podposloupnosti

Vybereme-li část členů některé posloupnosti a zachováme-li jejich pořadí, hovoříme o těchto vybraných číslech jako o *vybrané podposloupnosti*. Vybírat podposloupnosti můžeme všelijak, mrkněme se na pár fint:

Příklad 11. Dokažte, že z libovolné posloupnosti 101 různých čísel lze vybrat jedenáctičlennou podposloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ takovou, že buď platí $b_1 < b_2 < \cdots < b_{11}$ nebo platí $b_1 > b_2 > \cdots > b_{11}$.

Příklad 12. Všechna čísla posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou z intervalu $[0, 1]$. Platí, že hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nelze disjunktně rozdělit na dvě skupiny tak, že součet čísel v obou skupinách je větší než 1. Najděte největší možnou hodnotu součtu $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pro která n je tato hodnota dosažitelná?

Příklad 13. Buď součet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ roven $2n$ a největší z nich různé od $n+1$. Dokažte, že je-li n sudé, pak lze z posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vybrat několik členů tak, aby jejich součet byl roven n.

Příklad 14. Mějme přirozená čísla $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ taková, že součty $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ a $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ jsou rovny témuž číslu menšímu než $m \cdot n$. Dokažte, že v rovnosti

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

lze vyškrtnout několik sčítanců (ne všechny) tak, aby vzniklo opět platné tvrzení.

Aritmetické a geometrické posloupnosti

Aritmetickou posloupností s počátečním členem a a diferencí d rozumíme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ definovanou předpisem $a_i = a + (i-1)d$. Geometrickou posloupností s počátečním členem a a kvocientem q rozumíme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ definovanou předpisem $a_i = aq^{i-1}$.

Příklad 15. První člen a_1 i diference d aritmetické posloupnosti jsou přirozená čísla. Dokažte pak, že některý člen posloupnosti bude mít v dekadickém zápisu číslici 9.

Příklad 16. Nekonečná posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálných čísel splňuje pro libovolná m, n vztah

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}.$$

Dokažte, že potom je tato posloupnost aritmetická.

Příklad 17. Pro libovolné $n \geq 3$ najděte aritmetickou posloupnost délky n tvořenou složenými a navzájem nesoudělnými čísly.

Příklad 18. Existuje nekonečná geometrická posloupnost kladných čísel $a_1, \dots$ taková, že a_i je celé právě tehdy, když $i \in \{1, 2, \dots, 2010\}$?

Příklad 19. V geometrické posloupnosti kladných čísel se vyskytuje nekonečně mnoho celých čísel. Rozhodněte, zdali potom musí být její kvocient celé číslo.

Literatura

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova Univerzita, Brno, 1991
[2] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998