Posloupnosti a řady

Tomáš Bárta

Posloupnosti

Definice. *Posloupností reálných čísel nazveme každé zobrazení přirozených čísel do* $\mathbb{R}$.

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $a_1, a_2, \ldots$ *má limitu* $a \in \mathbb{R}$, *jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *přirozené tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *je* $|a_n - a| < \varepsilon$.

Věta. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta. *Jestliže* $\lim a_n = a$ *a* $\lim b_n = b$, *pak* $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$, $\lim(a_n b_n) = a \cdot b$. *Pokud jsou navíc* $b, b_1, b_2, \ldots$ *nenulová, pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní, jestliže platí* $a_n \leq a_{n+1}$ *pro všechna* $n \geq 1$ *nebo* $a_n \geq a_{n+1}$ *pro všechna* $n \geq 1$.

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená, jestliže existují* $K, L \in \mathbb{R}$ *taková, že* $K \leq a_n \leq L$ *pro všechna* n *přirozená.*

Věta. (Bolzano-Cauchyova podmínka) *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu tehdy a jen tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *přirozené tak, že pro libovolná* $m, n > n_0$ *je* $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Věta. (O policajtech) *Jestliže* $\lim a_n = \lim b_n = a$ *a posloupnost* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro všechna* n *přirozená, pak také posloupnost* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu a je* $\lim c_n = a$.

Věta. *Každá monotónní omezená posloupnost má limitu.*

Definice. *Buď* n_k *libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *se nazývá posloupností vybranou z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta. *Má-li posloupnost limitu, také každá posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu.*

Řady

Definice. *Buď* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost reálných čísel. Řadou nazveme symbol* $a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Číslo* $s_n = a_1+\cdots+a_n$ *nazveme* n*-tým částečným součtem.*

Definice. *Řekneme, že řada* $a_1+a_2+\cdots$ *konverguje k* $a \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\lim s_n = a$.

Věta. *Jestliže řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Věta. *Jestliže* $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ *a* $k \in \mathbb{R}$, *pak* $\sum(a_n \pm b_n) = a \pm b$ *a* $\sum k \cdot a_n = k \cdot a$.

Věta. (Bolzano-Cauchyova podmínka pro řady) $\sum a_n$ *konverguje tehdy a jen tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *přirozené tak, že pro libovolná* $m > n > n_0$ *je* $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$.

Definice. *Řekneme, že řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně, jestliže řada* $\sum |a_n|$ *konverguje.*

Věta. *Jestliže* $\sum a_n$ *konverguje absolutně, pak každá řada, která vznikne jejím přerovnáním, konverguje, a to k téže hodnotě. Konverguje-li* $\sum a_n$ *neabsolutně, pak jejím přerovnáním lze získat řadu s libovolným součtem, nebo i řadu divergentní.*

Kritéria konvergence řad

Věta. (Srovnávací kritérium) *Nechť* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *jsou řady s kladnými členy a platí* $a_n \le b_n$ *pro všechna* $n \ge 1$, *pak:*

(1) *pokud* $\sum b_n$ *konverguje, pak i* $\sum a_n$ *konverguje.*
(2) *pokud* $\sum a_n$ *diverguje, pak i* $\sum b_n$ *diverguje.*

Věta. (Odmocninové kritérium (Cauchyovo)) *Buď* $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$. *Pokud* $l < 1$, *pak* $\sum a_n$ *konverguje, pokud* $l > 1$, *pak* $\sum a_n$ *diverguje.*

Věta. (Podílové kritérium (d'Alambertovo)) *Buď* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Pokud* $l < 1$, *pak* $\sum a_n$ *konverguje, pokud* $l > 1$, *pak* $\sum a_n$ *diverguje.*

Věta. (Raabeovo kritérium) *Buď* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$. *Pokud* $l < 1$, *pak* $\sum a_n$ *diverguje, pokud* $l > 1$, *pak* $\sum a_n$ *konverguje.*

Věta. (Leibnitzovo kritérium) *Pokud* $a_1 \ge a_2 \ge \cdots$ a $\lim a_n = 0$, *pak je řada* $\sum(-1)^n a_n$ *konvergentní.*