Polynomy kvadratické a jiné

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek ukazuje klasické postupy a triky při řešení úloh s polynomy a rovnicemi (konkrétně kvadratickými) v reálných číslech.

Začneme zlehka dobře známou kvadratickou rovnicí a potom se podíváme obecněji na polynomy. Nebudeme se moc zdržovat teorií, ale hlavně řešit úlohy. K těm neřešeným jsou na konci příspěvku hinty. Tak pojďme na to!

Kvadratická rovnice

Tuhle legraci asi znáte ze školy, připomeňme si tedy základní vlastnosti.

Tvrzení. *Rovnice (kvadratická s koeficienty a, b, c; $a \neq 0$) tvaru*

$ax^2 + bx + c = 0$ má řešení (kořeny) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Pokud je výraz pod odmocninou (tzv. diskriminant) záporný, žádná reálná řešení rovnice nemá, pokud je roven nule, je řešení jedno a pokud je kladný, jsou řešení dvě. Rovnici potom také můžeme napsat jako $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Porovnáním dostáváme vztahy (Vietovy) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ a $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Toto tvrzení projde zatěžkávací zkouškou v následujícím příkladu:

Příklad 1. Nechť a, b, c jsou různá reálná čísla. Podívejme se na rovnici

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

Rovnice vypadá velmi kvadraticky, přesto všechna tři (různá) čísla a, b, c jsou jejím řešením, o čemž se snadno přesvědčíme. Jak je to možné?

Tvrzení. *Grafem kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola s vrcholem o souřadnicích $[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c]$. Pro kladné a je vrchol minimem funkčních hodnot, pro záporné je maximem.*

Znalosti o kvadratické rovnici můžeme (možná trošku překvapivě) velmi dobře využít pro řešení (kvadratických) nerovností.

Příklad 2. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ dokažte nerovnost $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Řešení. Na nerovnost se podíváme jako na nerovnici s neznámou x a upravíme ji na tvar kvadratické rovnice: $x^2+x(-y-1)+y^2-y+1 \geq 0$. Koeficient kvadratického členu je kladný, takže levá strana je záporná pouze pro hodnoty mezi kořeny. Chtěli bychom tedy dokázat, že (nezávisle na y) má nejvýše jeden (tzv. dvojný) kořen (z geometrického hlediska chceme dokázat, že graf naší funkce je celý nad osou x). Diskriminant je roven: $D = (-y-1)^2 - 4(y^2-y+1) = -3(y-1)^2 \leq 0$. Nerovnice tedy platí pro všechna x nezávisle na y, z čehož již plyne dokazovaná nerovnost. Našli jsme i jediný případ rovnosti (pro nulový diskriminant se parabola dotýká osy x, čili $y = 1$, a tedy $x = \frac{1+1}{2} = 1$).

Příklad 3. Pro všechna reálná x, y dokažte následující nerovnosti
$x^2 + y^2 + 2y + 4 \geq xy + 2x$
$2x^2 + 2y^2 + 1 \geq x + y + 2xy$.

Podívejme se na něco trochu těžšího.

Příklad 4. Jsou dána různá reálná čísla a, b, c. Dokažte, že alespoň dvě z rovnic

$$(x-a)(x-b) = x-c$$

$$(x-b)(x-c) = x-a$$

$$(x-c)(x-a) = x-b$$

mají reálný kořen. (Rusko 2013)

Příklad 5. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny $-22, 7, 13$. Jaká čísla mohou být čtvrtým kořenem?

Příklad 6. Reálná čísla a, b mají následující vlastnost: kvadratická rovnice $x^2 + ax+b+1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 + ax + b + 1 = 0$.
(i) Dokažte nerovnost $b > 3$.
(ii) Vyjádřete kořeny obou rovnic pomocí b. (MO 59–B–I)

Příklad 7. Buďte $f(x)$ a $g(x)$ kvadratické trojčleny s koeficientem 1 u kvadratického členu. Dokažte, že pokud rovnice $f(g(x)) = 0$, $g(f(x)) = 0$ nemají reálné kořeny, pak alespoň jedna z rovnic $f(f(x)) = 0$, $g(g(x)) = 0$ nemá reálné kořeny. (Rusko 2007)

Příklad 8. Kvadratický trojčlen $P(x) = x^2 + ax + b$ sdílí kořen s polynomem $P(P(P(x)))$. Dokažte, že $P(0) \cdot P(1) = 0$. (Rusko 2011)

Příklad 9. (těžší) Nechť $f(x) = x^2 + ax + b$ je kvadratický trojčlen takový, že rovnice $f(f(x)) = 0$ má čtyři reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), přičemž součet nějakých dvou z nich je roven -1. Dokažte, že $b \leq -\frac{1}{4}$. (Mecz Domaslav 2010)

Polynomy

Definice. Polynom stupně n je výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

přičemž $a_n \neq 0$. Čísla $a_i \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty polynomu a x je proměnná.

Poznámka. Podmínka $a_i \in \mathbb{R}$ není nutná, polynomy se definují i v jiných oborech, my se však budeme zabývat těmi reálnými.

Tvrzení. *Pokud $q \in \mathbb{R}$ je kořen $P(x)$, tak $(x-q)|P(x)$.*

Tvrzení. *Každý polynom stupně n má nejvýše n reálných kořenů.*

Důsledek. *Pokud se dva polynomy stupně n shodují v alespoň $n+1$ různých hodnotách, jsou identické.*

Důsledek. (Vietovy vztahy) *Má-li polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ n reálných kořenů $t_1, \ldots, t_n$, pak $P(x) = (x-t_1)(x-t_2)\ldots(x-t_n)$. Porovnáním koeficientů tak dostáváme*

$$a_i = (-1)^{n-i} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} t_{j_1} \cdots t_{j_i} \qquad j_i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Speciálně $a_0 = (-1)^n t_1 \cdots t_n$ a $a_{n-1} = -(t_1 + \cdots + t_n)$.

Lehčí příklady

Příklad 10. Vyřešte rovnice

$$2x^5 + x^4 + 2x + 1 = 0$$

$$x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$

Příklad 11. Polynom $P(x)$ stupně 2012 pro $k = 1, \ldots, 2013$ spňuje $P(k) = \frac{1}{k}$. Určete $P(2014)$. (MKS 29–1–8)

Příklad 12. Určete koeficienty polynomu $p(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, pokud znáte tři jeho kořeny $2, -3, 5$.

Příklad 13. Nechť jsou a, b, c reálná čísla taková, že

$$\begin{aligned} a+b+c &> 0, \\ ab+ac+bc &> 0, \\ abc &> 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že $a, b, c > 0$.

Příklad 14. Nechť a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + 5x^2 + 3$. Spočtěte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ a $a^4 + b^4 + c^4$.

Těžší příklady

Příklad 15. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou monické polynomy stupně 10 (koeficient u x^{10} je 1). Dokažte, že pokud rovnice $P(x) = Q(x)$ nemá žádné reálné řešení, pak rovnice $P(x+1) = Q(x-1)$ reálné řešení má.

Příklad 16. Dokažte, že polynom $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) - 1$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ jsou po dvou různá, nelze zapsat jako součin dvou polynomů stupně alespoň 1 s celočíselnými koeficienty.

(MKS–28–3–8)

Příklad 17. Polynom $P(x)$ stupně n má tu vlastnost, že $P(k) \in \mathbb{Z}$ pro všechna $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Dokažte, že potom už $P(x) \in \mathbb{Z}$ pro každé celé x.

Příklad 18. (Těžký) Pepa měl dvě sto-tice různých reálných čísel $(a_1, a_2, ..., a_{100})$, $(b_1, b_2, ..., b_{100})$. Políčka tabulky 100×100 vyplnil tak, že do políčka o souřadnicích $[i, j]$ napsal číslo $a_i + b_j$. Všiml si, že součin čísel v každém sloupci je 1. Dokažte, že součin čísel v každém řádku je -1.

Návody

1. Co kdyby rovnice ve skutečnosti kvadratická nebyla? Upravte ji.

3. Postupujte stejně jako v řešeném příkladu.

4. Pro spor předpokládejte, že dvě konkrétní rovnice (jsou cyklické) nemají reálné řešení, potom povolejte diskriminant.

5. Uvědomte si, co znamená, že je nějaké číslo kořenem $P(Q(x))$. Představte si graf $Q(x)$.

6. Použijte Vietovy vztahy. A pak znovu. Prostě pořád.

7. Kde musí mít trojčlen $f(x)$ kořeny, aby $f(g(x))$ kořen neměl?

8. Dokažte, že $P(0)$ je společný kořen.

9. Nakreslete si obrázek. Z toho, že má $f(f(x))$ čtyři řešení, odvoďte $4b \leq a^2 - 2a$. Rozeberte dva případy podle toho, které dva kořeny dávají součet -1.

10. Rozložte. Uhádněte kořen.

11. Jak to vypadá s kořeny polynomu $Q(x) = xP(x) - 1$?

12. Koeficient u kubického členu je nula. Co nám potom říkají Vietovy vztahy?

13. Nepřipadají vám ty výrazy nějak povědomé?

14. Opět Vietovy vztahy a potom chytře vyjádřit co je třeba pomocí toho, co už známe.

15. Zamyslete se nad stupni polynomů $P(x) - Q(x)$ a $P(x+1) - Q(x-1)$.

16. Postupujte sporem. Polynomy z předpokládaného rozkladu sečtěte a něco vhodného do nich dosaďte.

17. Nejprve dokažte, že $P(x)$ má racionální koeficienty. Potom dokažte, že společný jmenovatel koeficientů jakožto zlomků nedělí moc velká prvočísla.

18. Ze zadání vyrobte polynom(y) a pak překlápějte podle osy y.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem hlavně ze starších příspěvků *Vejtka Musila* a *Miša Szabadose* na toto téma a z webu `http://www.artofproblemsolving.com`.