Polynomy bez Viètových vztahů

MARTIN „E.T“ SÝKORA

ABSTRAKT. Příspěvek obsahuje důležité věty a tvrzení o polynomech a úlohy, které lze vyřešit za pomoci daných vět nebo nějakým chytrým trikem.

Polynomy jsou skutečně široké téma, a proto se při jejich zkoumání omezíme a nebudeme si povídat o Viètových vztazích. Ty jsou sice velmi užitečné, jak ale uvidíme, i bez nich dokážeme silné věty a s lehkostí vyřešíme obtížné příklady.

Definice 1. *Polynomem stupně n* rozumíme výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Čísla $a_i \in \mathbb{R}$ nazýváme *koeficienty polynomu* a x *proměnnou*. Stupeň nulového polynomu většinou klademe roven -1.

Poznámka 2. Můžeme upustit od podmínky $a_i \in \mathbb{R}$. Obecněji totiž lze definovat polynomy nad libovolným komutativním okruhem. (Typicky mohou být koeficienty celá nebo komplexní čísla.)

Definice 3. *Kořen* polynomu P je takové číslo t, že $P(t) = 0$.

Tvrzení 4. *Je-li P polynom stupně $n \geq 1$ a t jeho kořen, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $P(x) = (x - t)Q(x)$, kde Q je jednoznačně určený polynom stupně $n - 1$.*

Takzvaná *základní věta algebry* říká, že každý polynom nad komplexními čísly (s komplexními koeficienty) má alespoň jeden (komplexní) kořen. S využitím předchozího tvrzení se pak snadno ukáže, že každý komplexní polynom stupně n lze zapsat ve tvaru $a_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$, kde jednotlivá a_i jsou komplexní čísla. Důkaz této věty je složitý a přesahuje rámec přednášky. Platí ale, že každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Navíc má předchozí tvrzení tři zajímavé důsledky, které si na přednášce dokážeme.

Důsledek 5. *Nenulový polynom stupně n, kde $n > 0$, má nejvýše n kořenů.*

Důsledek 6. *Pokud se dva polynomy stupně nejvýše n shodují v alespoň $n + 1$ bodech, jsou identické.*

Důsledek 7. *Každými $n + 1$ body lze proložit unikátní polynom stupně nejvýše n.*

Věta 8. *Má-li polynom P celočíselné koeficienty a $a, b \in \mathbb{Z}$, pak $a - b \mid P(a) - P(b)$.*

Věta 9. *Má-li polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen r/s (v základním tvaru), pak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Lehčí ukázkové příklady

Příklad 10. Najděte všechny polynomy P splňující

$$P(0) = 0 \quad \text{a} \quad P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$$

pro všechna reálná x.

Příklad 11. Najděte všechny polynomy P splňující $P(2) = 6$ a $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ pro všechna reálná x.

Příklad 12. Ať P je polynom s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že je-li $P(n)$ dělitelné třemi pro tři po sobě jdoucí přirozená čísla, pak je dělitelné třemi pro všechna přirozená čísla.

Příklad 13. Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen? (MKS 34–6–4)

Další příklady

Příklad 14. Polynom P s celočíselnými koeficienty splňuje $P(0) = 1$. V kolika nejvíce různých celých číslech může nabývat hodnoty 2008? (MKS 28–3–5)

Příklad 15. Ať P je polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(0) = P(1) = 2011$. Ukažte, že $P(x)$ nemá celočíselný kořen.

Příklad 16. Polynom $P(x)$ stupně 2015 pro $k = 1, \ldots, 2016$ splňuje $P(k) = \frac{1}{k}$. Určete $P(2017)$. (MKS 29–1–8)

Příklad 17. Koeficienty polynomu P jsou přirozená čísla. Pro každé přirozené číslo n označme a_n součet cifer v desítkovém zápisu čísla $P(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ vyskytuje nekonečněkrát.
(MKS 21–6–6)

Příklad 18. Dokažte, že polynom $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ jsou po dvou různá, nelze zapsat jako součin dvou polynomů stupně alespoň jedna s celočíselnými koeficienty. (MKS 28–3–8)

Příklad 19. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou monické polynomy stupně 10 (tj. koeficient u x^{10} je 1). Dokažte, že pokud rovnice $P(x) = Q(x)$ nemá žádné reálné řešení, pak rovnice $P(x + 1) = Q(x - 1)$ reálné řešení má.

Návody

10. Postupně dosazujte za x hodnoty $0, 1, 2, \dots$ a použijte důsledek 6.

11. Z druhé rovnosti určete stupeň polynomu P, najděte jeho kořeny a rozložte jej. Možná se bude hodit pozorování, že P je sudý.

12. Z věty 8 plyne, že pokud je $a - b$ dělitelné třemi, pak i $P(a) - P(b)$ je dělitelné třemi.

13. Jedná se o ukázkový příklad. Jaká věta by se na něj asi mohla použít?

14. Uvažte $Q(x) = P(x) - 2008$. Hledejte maximální počet kořenů Q. Pro kořeny t_i platí $-2007 = at_1t_2 \dots t_n$, tedy $n \leq 5$. Vhodný polynom s pěti kořeny jistě najdete.

15. Kdyby a bylo celočíselným kořenem P, muselo by z věty platit $a \mid 2011$ i $a \pm 1 \mid 2011$, což není možné.

16. Zkoumejte kořeny polynomu $Q(x) = xP(x) - 1$.

17. Dosaďte „vysokou“ mocninu 10.

18. Sporem! Polynomy z předpokládaného rozkladu sečtěte a něco vhodného do nich dosaďte, čímž zjistíte, jaké stupně mohou mít. Rozebráním případů dojděte ke sporu.

19. Studujte stupně polynomů $P(x) - Q(x)$ a $P(x + 1) - Q(x - 1)$.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Tkadlec: *První setkání s polynomy*, Sborník MKS, Hojsova Stráž, 2011.
[2] David Hruška: *Polynomy kvadratické a jiné*, Sborník MKS, Horní Lysečiny, 2013.