Poloměnky

Martin Töpfer

Abstrakt. Ukázka využití poloměnek (tj. monovariantů) na příkladu mnoha úloh. Složitost úloh od triviální až po starší IMO.

Úlohy, ve kterých se objevují invarianty (neboli česky neměnky) jsou celkem časté. Občas se ale stane, že žádný takový invariant neexistuje (nebo ho alespoň neumíme najít). V takových případech může pomoci právě monovariant (neboli poloměnka). Jde o veličinu, která se sice mění, ale pouze jedním směrem - tj. buď jen klesá nebo jen stoupá.

Je to vidět!

V některých úlohách nám zdravý rozum může říkat, že tvrzení úlohy je zřejmé. Exaktní sepsání takových úloh ale nebývá úplně snadné a monovarianty v něm mohou velmi pomoct.

Příklad 1. V řadě vedle sebe je 100 mincí. V jednom tahu můžeme otočit kolik chceme sousedních mincí, pokud na té nejlevější z nich byl orel. Ukažte, že po konečném počtu kroků se dostaneme do stavu, kdy budou na všech mincích panny.

Příklad 2. 2013 lidí je rozmístěno ve 100 pokojích. Každou minutu někdo přejde z jednoho pokoje do pokoje, kde je alespoň tolik lidí jako v původním pokoji. Ukažte, že po konečně mnoha krocích budou všichni v jedné místnosti.

Příklad 3. V každém políčku tabulky $m \times n$ je napsáno reálné číslo. V jednom kroku můžeme změnit znaménka u všech čísel v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Ukažte, že lze dosáhnout stavu, kdy bude součet v každém řádku i v každém sloupci nezáporný.

Příklad 4. Na několika políčkách nekonečného pásku je dohromady konečné množství žetonů. V jednom tahu můžeme vzít dva žetony z téhož políčka, jeden posunout o 1 směrem doprava a druhý o 1 směrem doleva. Můžeme se po konečně mnoha krocích vrátit do původního stavu?

Přeskupování

Pokud máme ukázat, že lze vytvořit nějaký stav (např. rozdělení lidí), občas jde postupovat tak, že vyjdeme z obecného stavu a popíšeme takovou operaci (přeskupení lidí), že se při něm nějaká veličina (poloměnka) vždy sníží. Pak se už jednoduše ukáže, že až operace nepůjde provést, budeme v požadovaném stavu.

Příklad 5. Na zájezdu má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem.

Příklad 6. V rovině je dáno n modrých a n červených bodů tak, že žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že lze nakreslit n úseček tak, aby každý z $2n$ bodů byl spojený s právě jedním bodem jiné barvy a žádné dvě úsečky se nekřížily.

Příklad 7. Mějme n lidí, kteří jsou navzájem vždy buď přátelé, nebo nepřátelé. Ukažte, že je můžeme rozdělit do dvou skupin tak, aby každý byl ve skupině alespoň s tolika přáteli, kolik je tam jeho nepřátel.

Ukončení procesu

V úlohách, které se nás ptají, zda nějaký proces skončí, můžeme hledat klesající poloměnku přirozených čísel a poté využít triviálního tvrzení:

Věta 8. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Příklad 9. Vrcholy n-úhelníka jsou očíslované reálnými čísly. Buďte a, b, c, d čtyři sousední čísla. Je-li $(a-d)(b-c) < 0$, můžeme vyměnit b a c. Může být tato operace prováděna nekonečně dlouho?

Příklad 10. Na několika políčkách pásku délky 1000 je dohromady konečně mnoho žetonů. V jednom tahu můžeme vzít dva žetony z téhož políčka, jeden posunout o 1 směrem doprava a druhý o 1 směrem doleva. Ukažte, že po konečně mnoha krocích už nebudeme moci žádným žetonem pohnout.

Příklad 11. Na tabuli je několik přirozených čísel. V jednom kroku můžeme dvě čísla nahradit jejich největším společným dělitelem a nejmenším společným násobkem. Ukažte, že nastane situace, kdy na tabuli zůstanou po provedení popsaného kroku všechna čísla stejná. (St. Petersburg, 1996)

Příklad 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986–3)

Příklad 13. Ve 123 místnostech je rozmístěno 1000 mužů a 1000 žen. Pro pohyb mezi místnostmi platí, že buď muž jde z místnosti s více muži než ženami do místnosti s více ženami než muži (počítáno před jeho pohybem), nebo naopak žena jde z místnosti s více ženami než muži do místnosti s více s více muži než ženami (počítáno před jejím pohybem). Ukažte, že nastane situace, kdy se nebude moci nikdo pohnout.

Příklad 14. Mějme k přepínačů v řadě. Každý přepínač ukazuje nahoru, doprava, dolů nebo doleva. Pokud tři sousední přepínače ukazují různými směry, jsou všechny přepnuty do čtvrtého směru. Ukažte, že se proces zastaví. (BAMO 2006–5)

Literatura a zdroje

Z anglické literatury jsem čerpal z

[1] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998
[2] Zvezdelina Stankova, Tom Rike: *A Decade of the Berkley Math Circle*, AMS MSRI, 2008

Z českých zdrojů jsem využil materiálů k *Umění vidět v matematice* a také několika příspěvku v PraSečí knihovničce o invariantech.