Pohled na numerickou matematiku

Lenka Zdeborová

Byli jste postaveni před úlohu, se kterou si na papíře neumíte poradit? Sedněte k počítači on ten téměř vše vyřeší numericky za vás. Hurááá! Ale co to?!? Vždyť vám vycházejí úplné nesmysly. Model je správný, chyby ve vstupních datech nejsou, tak v čem je problém?

Celá záhada tkví v tom, že čísla se do počítače ukládají s konečnou přesností. Ukážeme si jaké teoreticky zajímavé a prakticky děsivé důsledky to přináší a jak se s nimi vypořádat.

- *Cancelation* (zrušení platných cifer) — vzniká při odčítání blízkých čísel.
- *Smearing* (rozmazání) — projevuje se při sčítání řady, jejíž součet je v absolutní hodnotě mnohem menší než některé její členy.
- *Numerická nestabilita* — vnáší chyby při počítání pomocí rekurentních formulí.
- *Špatně podmíněné úlohy* — malá změna vstupních dat přinese velkou chybu výsledku.

Nelineární rovnice

Jedním z velkých úkolů numerické matematiky je řešení nelineárních rovnic, kteréžto se v aplikacích vyskytují velmi často a explicitně je řešit až na výjimky neumíme.

Zmíněné výjimky tvoří např. polynomiální rovnice druhého, třetího a čtvrtého stupně atd. Na přednášce se o nich krátce zmíníme blíže a možná napíšeme explicitní řešení rovnice $x^5 + 20x + 32 = 0$.

Většinou ovšem přímá metoda (tj. mající konečný počet kroků) výpočtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ neexistuje, přistupujeme tedy k metodám iteračním.

Definice. (Iterační metody)

- *Prostá iterační metoda — Zvolíme počáteční odhad kořenu x_0 a rovnici $f(x) = 0$ přepíšeme do tvaru $x = \varphi(x)$, n-tá aproximace pak je $x_n = \varphi(x_{n-1})$.*
- *Půlení intervalů — Počáteční odhady volím tak, aby $f(x_0)f(x_1) < 0$, n-tá aproximace kořenu pak je $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$, přičemž pro další prohodíme x_{n-1} s x_{n-2}, pokud $f(x_n)f(x_{n-2}) < 0$.*
- *Newtonova metoda tečen — n-tá aproximace je*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \ ,$$

kde čárka značí derivaci funkce.

- *Metoda sečen — n-tá aproximace je*

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \ .$$

Na přednášce si řekneme, kdy ta která metoda konverguje, jak rychle, jak to závísí na počátečních hodnotách. A nakreslíme, co ta která metoda znamená v řeči grafu funkce.

Řešení soustav nelineárních rovnic je velmi složité, často se používá metoda, která hledá minimum výrazu

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2,$$

kde f_i (x_i) je i-tá funkce (proměnná).