# Počítání dvěma způsoby

Tomáš Novotný

Abstrakt. Počítání dvěma způsoby je velmi mocný nástroj k dokazování (nejen) kombinatorických identit. V příspěvku si ukážeme několik úloh, které lze touto technikou vyřešit a pokusíme se naučit způsob, jak řešení takových úloh vymýšlet.

Hlavní motivací pro využívání techniky počítání dvěma způsoby je elegantní přístup k spočítání nějakého údaje (obvykle součet mnoha netriviálních hodnot) či dokázání zadané rovnosti. To provedeme tak, že vytvoříme objekt, na jehož prvky můžeme nahlížet více způsoby. Tyto pohledy budou odpovídat hledaným hodnotám, jelikož však počítáme prvky stejného objektu, musí nám vždy vyjít stejné číslo.

**Úloha.** Spočítejte

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n}.$$

*Řešení.* Chceme se na tento součet podívat jako na reprezentaci nějaké situace – kombinační čísla v součtu naznačují, že nám půjde o všechny podmnožiny $n$-prvkové množiny, přičemž každá $i$-prvková podmnožina přispívá do součtu právě $i$. Můžeme si to tedy představit tak, že do místnosti s jedním papírem chodí postupně všechny možné skupinky z $n$ orgů a každý z nich vždy udělá na papír jednu tečku.

Jeden způsob, jak tečky spočítat, je vyjádření počtu teček pomocí velikosti jednotlivých skupinek orgů – takto dostaneme součet zadaný v úloze. Druhým způsobem je spočtení, kolik teček udělá každý organizátor. To je však snadné, neboť každý organizátor jde do místnosti právě jednou s kteroukoli skupinkou ze zbylých organizátorů, kterých je celkem $2^{n-1}$. Teček tedy bude $n \cdot 2^{n-1}$, což je hledané řešení.

K počítání dvěma způsoby se často hodí různé kombinatorické identity, několik z nich si zde ukážeme a zkusíme je odvodit.

### Lehké příklady

**Příklad 1.** Dokažte

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Příklad 2.** Na večírku si někteří lidé vzájemně potřásli rukou. Ukažte, že počet lidí, kteří si potřásli rukou lišekrát, je sudý.

**Příklad 3.** Dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

**Příklad 4.** Dokažte

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

**Příklad 5.** Nechť $\mathbb{P}$ je systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až $n$ takových, že žádné 3 sousední prvky netvoří rostoucí posloupnost. Označme $a_i$ průměrnou hodnotu na $i$-té pozici těchto permutací, tj.

$$a_i = \frac{\sum_{p \in \mathbb{P}} p_i}{|\mathbb{P}|}.$$

Čemu se rovná součet všech $a_i$?

**Příklad 6.** (Vandermondova identita) Dokažte

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

**Příklad 7.** Označme $\mathbb{S}_n$ systém všech permutací $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1 až $n$. Pro permutaci $p \in \mathbb{S}_n$ označme

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i.$$

Ukažte, že

$$4 \sum_{p \in \mathbb{S}_n} f(p) = (n^2 + n)(n+1)!.$$

**Příklad 8.** V matematické olympiádě řešilo 45 účastníků šest příkladů, každý příklad byl vyřešen právě 25 řešiteli. Ukažte, že můžeme vybrat dva účastníky, kteří dohromady vyřešili vše.

### Těžší příklady

**Příklad 9.** Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{2n} i(2n+1-i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

**Příklad 10.** Dokažte, že platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

**Příklad 11.** Spočítejte

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+n^2\binom{n}{n}.$$

**Příklad 12.** (LYM-nerovnost) Buď $A$ $n$-prvková množina, $\mathbb{S}$ systém podmnožin $A$ takový, že žádné dvě množiny z $\mathbb{S}$ nejsou v inkluzi. Označme $a_i$ počet $i$-prvkových množin v $\mathbb{S}$. Pak platí

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\leq 1.$$

**Příklad 13.** (Malá Fermatova věta) Ukažte, že je-li $p$ prvočíslo, pak

$$a^p\equiv a \pmod p.$$

**Příklad 14.** (Cayleyho formule) Určete počet koster úplného grafu na $n$ vrcholech.

## Návody

**1.** Vybíráme $k+1$ z $n+1$ lidí. Prvního buď vybereme, anebo ne.

**2.** Označme uspořádanou dvojicí $(x,y)$ to, že si $x$ potřásl rukou s $y$. Porovnejte celkový počet těchto dvojic se součtem počtů potřesení od jednotlivých účastníků večírku.

**3.** Vybíráte podmnožiny $n$-prvkové množiny.

**4.** Jsou dva postupy, jak z $n$ prvků vybrat podmnožiny $A$ a $B$ s $|A|=r$ a $|B|=k$ tak, aby $B\subseteq A$.

**5.** Podívejte se na součet z pohledu jednotlivých permutací.

**6.** Máte $n$ děvčat a $m$ hochů a chcete z nich vytvořit $k$-členný tým.

**7.** Určete, kolikrát se v součtu vyskytuje člen $i\cdot j$ a pak tyto členy posčítejte.

**8.** Všimněte si, že existuje účastník, který vyřešil alespoň čtyři úlohy a také existuje účastník, který vyřešil zbylé dvě.

**9.** Nakreslete si trojúhelník z kostiček se základnou délky $2n$, kde v $i$-tém patře jsou kostičky s číslem $i$. Kostičky pak postupně od kraje trojúhelníku odebírejte.

**10.** Nakreslete si čtvercovou mřížku o straně $n$ a do políčka na pozici $[i,j]$ napište číslo $i\cdot j$. Sečtěte všechna čísla po řádcích a po „elkách“ od rohu $[1,1]$.

**11.** Použijte podobnou myšlenku jako u motivační úlohy, zbylou sumu už spočítat umíte.

**12.** Pro každou množinu $S\in\mathbb{S}$ vytvořte všechny permutace $n$ prvků takové, že prvních $|S|$ prvků bude z $S$. Těchto permutací bude nejvýše tolik jako všech permutací $n$ prvků.

**13.** Spočítejte všechny řetězce délky $p$, kde každý znak je z $a$-prvkové abecedy a nejsou v nich všechny znaky stejné. Tyto řetězce poté můžete rozdělit na skupinky po $p$.

**14.** Spočtěte dvěma způsoby počet možností vytvoření zakořeněného stromu s $n$ hranami orientovanými od kořene. Zkuste spočítat počet možných vytvoření z běžných stromů a také vytvářet strom po hranách.

## Literatura a zdroje


[1] Martin Hora: *Počítání dvěma způsoby*, Sborník MKS, Hojsova stráž, 2016.
[2] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Sborník MKS, Staré Město, 2009.
[3] *Wikipedia: Double counting*,
*https://en.wikipedia.org/wiki/Double_counting_(proof_technique)*