Počítání dvěma způsoby

Martin Hora

Abstrakt. Seznámíme se s technikou počítání dvěma způsoby. Tato metoda stojí na jednoduchém faktu, že počet prvků dané množiny, ať už je spočítáme jakkoliv, je stále stejný. Techniku si procvičíme na důkazech užitečných kombinatorických identit, spočítáme pomocí ní několik příkladů a nakonec ji použijeme k důkazu dvou zajímavých matematických vět.

Úmluva. Všechny použité proměnné $n, m, k, \ldots$ jsou celá nezáporná čísla, nebude-li řečeno jinak.

Příklad. Na večírku se sejde konečný počet lidí. Někteří z nich si na přivítanou potřesou pravicí. Dokažte, že počet hostů, kteří si podali ruku s lichým počtem lidí, je sudý.

Řešení. Označme P množinu lidí, kteří dorazili na večírek. Nechť R je množina uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x, y \in P$ a host x podal ruku na přivítanou hostu y. Dále označme p_x počet lidí, kterým podal ruku host x, a t celkový počet potřesení rukou.

Pak velikost množiny R je rovna z jedné strany $\sum_{x\in P} p_x$. Z druhé strany se pak mohutnost R rovná $2t$, jelikož když $(x, y) \in P$, pak i $(y, x) \in P$. Tedy

$$\sum_{x\in P} p_x = 2t.$$

Suma celých čísel je sudá právě tehdy, když obsahuje sudý počet lichých čísel. To znamená, že počet lidí, kteří si potřásli rukou s lichým počtem návštěvníků, musí být sudý.

Definice. *Kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet možností, kterými lze vybrat k objektů z n.

Kombinatorické identity

K počítání dvěma způsoby je ještě nutné osvojit si jednu důležitou schopnost. Pokud dostaneme počet možností, tak potřebujeme vymyslet příklad, jemuž tento počet možností odpovídá. Tímto způsobem se pokuste nahlédnout následující rovnosti.

Příklad 1. Dokažte
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Příklad 2. Dokažte
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Příklad 3. Dokažte
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Příklad 4. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Příklad 5. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n.$$

Příklad 6. Dokažte
$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

Příklad 7. (Vandermondova identita)
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Příklad 8. Dokažte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Příklad 9. Dokažte
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Těžší příklady

Příklad 10. V tabulce $n \times n$ je v každém políčku napsáno číslo vyjadřující, v kolika pravoúhelnících se vyskytuje. Dokažte, že součet čísel v celé tabulce je roven druhé mocnině přirozeného čísla. (MKS 29–3–7)

Příklad 11. V poslanecké sněmovně je 200 poslanců, kteří postupně hlasují o n zákonech. (Poslanec může být buď *pro* schválení zákona, nebo *proti*, nebo se může *zdržet* hlasování.) Je známo, že pro každá dvě hlasování existuje poslanec, který v jednom hlasoval pro a v jednom proti. Označme z_i počet poslanců, kteří se zdrželi hlasování o i-tém zákonu. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{z_i} \leq 2^{200}.$$

(MKS 32–8–7)

Příklad 12. V obdélníkové tabulce $m \times n$ jsou napsaná nezáporná reálná čísla, přičemž každý sloupec a každý řádek obsahuje alespoň jedno kladné číslo. Pokud se navíc řádek a sloupec protínají v políčku, kde je kladné číslo, tak je jejich součet stejný. Dokažte, že $m = n$. (Kanada 2006)

Příklad 13. (Erdős–Ko–Radova věta) Nechť k a n jsou přirozená čísla taková, že $2k \leq n$. Dále nechť $\mathcal{M}$ je množina k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro všechny množiny $C, D \in \mathcal{M}$ platí, že $C \cap D \neq \emptyset$. Dokažte, že $|\mathcal{M}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Příklad 14. (Cayleyho formule) Kolik koster má úplný graf na n vrcholech?

Návody

1. Vybírejme k lidí z n. Počet způsobů, kterými to můžeme udělat, lze vyjádřit pomocí lidí, které vybereme, nebo pomocí lidí, které nevybereme.

2. Vybíráme $k + 1$ lidí z $n + 1$. Prvního buď vybereme, anebo ne.

3. Vybírejme r lidí z n a z těchto r lidí ještě k-člennou komisi.

4. Kolika způsoby můžeme vybrat podmnožinu n-prvkové množiny?

5. Mějme n rytířů, ze kterých chceme vybrat trestnou výpravu proti loupežníkům, která bude mít svého velitele.

6. Tentokrát má trestná výprava d-členné velení.

7. Máme n děvčat a m hochů a chceme z nich vytvořit r-členný tým.

8. Nyní máme děvčat i chlapců n.

9. Namalujte si čtverec se stranou $\sum_{i=1}^{n} i$ a zkuste ho pokrýt pomocí čtverců z pravé strany. k^3 znamená, že máme k čtverců o straně k.

10. Součet čísel spočítejte přes všechny obdélníky, které se vejdou do mřížky. Každý obdélník započítejte tolikrát, kolik políček obsahuje.

11. Kolik nejvýše hlasování mohlo proběhnout, pokud by každý hlasoval pro, nebo proti? Kolika způsoby lze doplnit ta hlasování, kde se někdo zdržel, tak, aby každý hlasoval?

12. Uvažte podtabulku tvořenou řádky a sloupci takovými, že součet čísel v každém z nich je stejný. Jaké má tato podtabulka rozměry?

13. *Cyklickým intervalem* nazveme množinu k po sobě jdoucích čísel modulo n. (Například $\{n-2, n-1, 0, 1, \ldots, k-2, k-3\}$ je cyklický interval.) Dvěma způsoby počítejte počet uspořádaných dvojic (N, π), kde $N \in M$ a π je permutace, která převádí N na nějaký cyklický interval.

14. Počítejte dvěma způsoby, jak vytvořit postupným přidáváním hran zakořeněný orientovaný strom o n vrcholech takový, že všechny jeho hrany jsou orientovány směrem od kořene.

Literatura a zdroje

[1] Štěpán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, Sborník MKS, Horní Lysečiny, 2013.
[2] Zuzka Safernová: *Dvojí počítání*, Sborník MKS, Staré Město, 2009.