Počítání v planimetrii

Michal "Kenny" Rolínek

Cílem této přednášky je obohatit vaše znalosti z planimetrie o nové metody, založené na algebraickém přístupu. Nebudeme ovšem sáhodlouze upravovat obrovské výrazy, jak by se mohlo zdát. Naopak si ukážeme příklady, v nichž nás trocha počítání dovede velmi přímočaře k řešení. Též se naučíme účinně používat několik šikovných tvrzení.

Pár příkladů na rozjezd

Příklad 1. Mějme rovnostranný trojúhelník a bod X uvnitř něho. Paty kolmic z bodu X na strany trojúhelníka označme P, Q a R. Ukažte, že součet

$$|XP| + |XQ| + |XR|$$

nezávisí na volbě bodu X.

Příklad 2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1||AB$, $MB_1||BC$ a $MC1||CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$.

Příklad 3. Je dána úsečka AC a na ní ležící bod B. Nad průměry AC a AB sestrojme kružnice. Těm sestrojme vnější společnou tečnu, která se jich dotkne v bodech P_1 a P_2. Dokažte, že platí

$$|P_1P_2|^2 = |AB||BC|.$$

Příklad 4. Označme a, b, c, d strany čtyřúhelníka $ABCD$. Ukažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé právě tehdy, když platí

$$a^2 + c^2 = b^2 + c^2.$$

Pokud je navíc tento čtyřúhelník tečnový, dokažte, že platí $ac = bc$.

Příklad 5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Průměr kružnice jemu vepsané označíme d. Dokažte, že platí

$$a + d = b + c.$$

Příklad 6. Uvažme kružnici k a její průměr AB. Zvolme na AB bod X a na kružnici k libovolnou tětivu CD rovnoběžnou s AB. Dokažte

$$|XA|^2 + |XB|^2 = |XC|^2 + |XD|^2.$$

Příklad 7. Na straně AB rovnostranného trojúhelníka ABC zvolme bod D. Sestrojme rovnostranné trojúhelníky ADE a BDF tak, že body E a F leží v opačné polorovině určené přímkou AB než bod C. Dokažte, že středy trojúhelníků ABC, ADE a BDF tvoří rovnostranný trojúhelník.

Příklad 8. Buď ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom přímka spojující střed T_a strany BC se středem I kružnice vepsané protíná výšku jdoucí vrcholem A v bodě, který má od tohoto vrcholu vzdálenost rovnou poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

Příklad 9. V $\triangle ABC$ je I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, co obsahuje B). Dokažte, že

$$|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|.$$

Příklad 10. (IMO 2005) Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC je zvoleno 6 bodů. Na straně a body A_1, A_2, na straně b body B_1, B_2 a na straně c body C_1 a C_2. Tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníka jehož strany mají všechny stejnou délku. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 procházejí jedním bodem.

Počítání tečen

Tvrzení. *Trojúhelníku ABC vepišme kružnici, která se dotkne jeho stran a, b a c postupně v bodech D, E a F. Délky úseček BD, CE a AF umíme snadno pak snadno vyjádřit pomocí délek a, b a c. Obdobná tvrzení platí i pro kružnice připsané.*

Příklad 1. Trojúhelníku ABC připišme kružnici ke straně a. Ta se strany a dotkne v bodě D. Dokažte, že úsečka AD půlí obvod trojúhelníka.

Příklad 2. Na straně AB trojúhelníka ABC označme X bod dotyku s kružnicí vepsanou a Y bod dotyku s příslušnou kružnicí vepsanou. Ukažte, že střed úsečky XY je též středem úsečky AB.

Příklad 3. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Ukažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a CDA mají vnější dotyk.

Příklad 4. Kružnice, která prochází vrcholy A a C trojúhelníku ABC protíná jeho strany BC a AB po řadě v bodech A_1 a C_1. Označme dále P průsečík přímek AA_1 a CC_1. Je-li čtyřúhelník PC_1BA_1 tečnový, je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Příklad 5. Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky, které se protínají v bodě S. Označme po řadě I_a, I_b, I_c a I_d poloměry kružnic vepsaných trojúhelníků ASB, BSC, CSD a DSA. Dokažte, že $I_a+I_c = I_b+I_d$ právě tehdy, když lze čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnice.

Počítání v tětivovém čtyřúhelníku

Věta. (Ptolemaiova) *Pokud je $ABCD$ tětivový čtyřúhelník s běžně označenými stranami a úhlopříčkami e, f platí*

$$ac + bd = ef.$$

Cvičení. Dokažte opačnou implikaci.

Příklad 1. Na kratším oblouku BC kružnice opsané rovnoramennému ($|AB| = |AC|$) trojúhelníku ABC leží bod X. Dokažte, že platí

$$\frac{|AX|}{|BX| + |CX|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Příklad 2. Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod X. Ukažte, že podíl

$$\frac{|BX| + |CX|}{|AX| + |DX|}$$

nezávisí na volbě bodu X.

Příklad 3. Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod X. Ukažte, že platí

$$\frac{|AX| + |CX|}{|BX| + |DX|} = \frac{|DX|}{|AX|}.$$

Příklad 4. Na kratším oblouku BC kružnice opsané pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ leží bod X. Dokažte, že platí

$$|XA| + |XD| = |XB| + |XC| + |XE|.$$

Příklad 5. Na kratším oblouku BC kružnice opsané pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ leží bod X. Dokažte, že platí

$$|XE| + |XF| = |XA| + |XB| + |XC| + |XD|.$$

Příklad 6. Zobecněte předchozí úlohy na pravidelný n–úhelník.

Počítání v trojúhelníku

Příklad 1. V $\triangle ABC$ vyjádřete délku těžnice pomocí délek stran.

Příklad 2. Ukažte, že v každém trojúhelníku platí implikace $a > b \Rightarrow t_a < t_b$.

Příklad 3. Označme G těžiště trojúhelníku ABC. Dokažte

$$|AG|^2 + |BG|^2 + |CG|^2 = \frac{1}{3}(|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2).$$

Příklad 4. V $\triangle ABC$ vyjádřete délku výšky pomocí délek stran.

Věta. (Stewartova) *V $\triangle ABC$ zvolíme na AB bod D. Délku $|CD|$ označíme d a budeme ji chtít spočítat, víme-li délky úseků $|BD| = m$ a $|AD| = n$. To se nám podaří díky následujícímu vzorci*

$$a^2n + b^2m = c(d^2 + mn).$$

Cvičení. Spočítejte pomocí Stewartovy věty délky těžnic a os úhlů v trojúhelníku. Zkuste též spočítat délku spojnice vrcholu a třetiny protější strany.

Příklad 5. Ukažte, že součet čtverců délek stran rovnoběžníka je roven součtu čtverců jeho úhlopříček.

Příklad 6. Rozdělme přeponu AB pravoúhlého trojúhelníka ABC na třetiny AX, XY a YB. Dokažte, že platí

$$|CX|^2 + |CY|^2 = \frac{5}{9}|AB|^2.$$

Dá se úloha zobecnit na čtvrtiny, pětiny, ..., n-tiny?

Příklad 7. (Pro počítavce) Nalezněte všechny trojúhelníky, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost, a zároveň i délky jejich těžnic tvoří aritmetickou posloupnost.

Příklad 8. Buď ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom přímka spojující střed T_a strany BC se středem I kružnice vepsané protíná výšku jdoucí vrcholem A v bodě, který má od tohoto vrcholu vzdálenost rovnou poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

Specialitka na závěr

Věta. (Archimédova) *Na kružnici k s průměrem AB leží bod X. Na úsečce XB zvolme bod Y a veďme jím kolmici na XB, která protne k v bodě M. Pak platí, že M je střed oblouku AB právě tehdy, když $|XA| + |XY| = |YD|$.*

Příklad 1. Je dán $\triangle ABC$ a M střed strany BC. Na straně AB nalezněme bod N takový, že $|\sphericalangle MNA| = \frac{\beta}{2}$. Dokažte, že úsečka MN dělí obvod trojúhelníka ABC napůl.

Příklad 2. (Calábek) Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Na stranách AB a BC jsou zvoleny body M a N tak, že $MN||AC$ a zároveň platí

$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = 2.$$

Označme O průsečík přímek CM a AN. Na úsečce ON zvolme bod K tak, že platí $|MO|+|OK| = |KN|$. Označme dále T průsečík kolmice k přímce ON procházející bodem K s osou úhlu ABC. Dokažte, že úhel MTB je pravý.