Počítání v kombinatorice a pravděpodobnosti

Šárka Štěpánová

V kombinatorice i pravděpodobnosti se často vyskytují úlohy jejichž přímočaré řešení je velmi náročné, avšak pokud si osvojíme některé poměrně snadné „finty“, stanou se rázem záležitostí několika málo minut.

Nejdříve si zavedeme několik základních pojmů a tvrzení z kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti; definice nejsou formální, za to však doufejme srozumitelné.

Definice. (Faktoriál) *$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$ je počet permutací na n-prvkové množině (tj. libovolné přerovnání čísel $1, 2, \dots, n$).*

Definice. (Kombinační číslo) *$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ je počet možností, jak vybrat k různých prvků z n (navzájem různých) prvků (nezáleží nám na pořadí, ve kterém prvky vybíráme).*

Definice. (Eulerova funkce) *$\varphi(n) = |\{m : 1 \le m \le n, (m,n) = 1\}|$, kde m a n jsou přirozená čísla a (m,n) značí jejich největší společný dělitel.*

Definice. (Pravděpodobnost) *Stačí, když tento pojem budeme chápat intuitivně.*

Definice. (Jev) *Jevem rozumíme něco, co se buď stane, nebo nestane.*

Definice. (Úplný systém jevů) *Úplným systémem jevů rozumíme takový systém jevů, že při daném pokusu vždy musí nastat právě jeden z nich.*

Definice. (Podmíněná pravděpodobnost) *Symbolem $P(A|B)$ značíme pravděpodobnost, že nastane jev A, víme-li, že nastal jev B.*

Definice. (Náhodná veličina) *Náhodnou veličinou X rozumíme číselný výsledek pokusu (např. kolik ok padlo na kostce).*

Definice. (Střední hodnota) *Střední hodnotou náhodné veličiny X rozumíme její průměrnou hodnotu, opakujeme-li pokus; značíme ji symbolem $\mathbf{E}X$ (např. při házení kostkou je $\mathbf{E}X = 3.5$). Platí $\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$, kde X je náhodná veličina, která nabývá hodnot x_i (a to s pravděpodobnostmi $P(x_i)$), $i = 1, \dots, n$.*

Definice. (Podmíněná střední hodnota) $\mathbf{E}(X|B) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i|B)$.

A nyní několik tvrzení:

Věta. (Princip inkluze a exkluze) *Mějme konečné množiny $A_1, \dots, A_n$. Pak platí*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Mějme úplný systém jevů $\{B_j, j = 1, \dots, m\}$. Pak platí následující dvě věty:

Věta. (O úplné pravděpodobnosti)

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A|B_j) \cdot P(B_j).$$

Věta. (O úplné střední hodnotě)

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}(X|B_j) \cdot P(B_j).$$

Těžištěm přednášky však bude ukázat, jak řešit alespoň některé z následujících příkladů:

Příklady.

(1) Kolik je přirozených čísel menších než 1000, která nemají žádného dělitele většího než 1 a menšího než 10?

(2) Kolik je monických polynomů nad $\mathbb{Z}_p$, které nemají žádný kořen?

(3) Dokažte, že pro n, m, r přirozená a $n \geq r \geq m$ platí

$$\binom{n-m}{r-m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n-k}{r}.$$

(4) Kolik je uspořádaných dvojic (A_1, A_2) disjunktních podmnožin n prvkové množiny?

(5) Kolik je zobrazení z n-prvkové do k-prvkové množiny, která jsou na?

(6) Dokažte následující identitu ($m \geq k$):

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{k-i} = \binom{m}{k}.$$

(7) Dokažte, že pro Eulerovu funkci platí následující dvě rovnosti:

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \qquad \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(8) Kolik je přirozených čísel menších než 100, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného přirozeného čísla většího než 1?

(9) Kolik existuje pořadí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P z nichž vypuštěním některých písmen nelze dostat ani jedno ze slov PONK, DOBA, COP? Co když zakážeme ještě OPICE?

(10) Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Němce a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok?

(11) Na plese je n manželských párů. Kolika způsoby lze utvořit n tanečních párů tak, aby žádný manželský pár netančil spolu?

(12) Kolika způsoby můžu kolem kulatého stolu rozsadit n manželských párů, tak aby se střídali muži a ženy, ale aby žádní dva manželé neseděli vedle sebe?

(13) Jaká je pravděpodobnost, že mezi k lidmi mají alespoň 2 narozeniny ve stejný den?

(14) Určete střední hodnotu délky nejdelšího počátečního vzrůstajícího úseku v náhodné permutaci čísel $1, 2, \ldots, n$.

(15) Určete pravděpodobnost, že 1 a 2 jsou ve stejnem cyklu náhodné permutace.

(16) Určete počet permutací s právě jedním pevným bodem (resp. s právě k pevnými body).

(17) Jaká je pravděpodobnost, že cyklus náhodné permutace n prvků, který obsahuje 1 má délku k?

(18) Jaká je pravděpodobnost, že náhodná permutace na n prvcích nemá žádný pevný bod?

(19) Hodíme n-krát spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu úseků stejných hodů?

(20) Pro dané číslo N určete pravděpodobnost, že zvolíme-li náhodně 2 čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$, budou nesoudělná.