# Počítání dvěma způsoby

*Martin Tancer*

Úlohy, kde se dokazuje rovnost dvou výrazů, určuje hodnota nějakého výrazu, ... lze řešit mnoha způsoby. O jeden z nich se bude zajímat tato přednáška. Hlavní myšlenkou je spočítat tentýž údaj (například velikost množiny) více způsoby, dostaneme pak například rovnost dvou výrazů, které na první pohled nevypadají, že by mohly mít něco společného. K tomu je velmi často vhodné najít nějakou kombinatorickou interpretaci zadaného výrazu, jehož hodnotu chceme určit.

**Motivační úloha.** Určete hodnotu výrazu

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}.$$

**Řešení.** Organizátoři PraSátka, kterých je $n$, si dali schůzku v menze, aby se domluvili, kdo chce napsat nějaký příspěvek do sborníčku, navíc mezi přispěvateli bude jeden z organizátorů kontrolovat gramatickou správnost a jeden kontrolovat správnost matematickou (může a nemusí to být tentýž organizátor). Spočítejme, kolik je možností, jak může schůzka dopadnout (organizátoři se samozřejmě na nějakém řešení domluví).

I. způsob: Povězme, že $k$ organizátorů bude psát příspěvek, ty můžeme vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Potom ještě zbývá vybrat korektory, pro které máme $k^2$ možností. Dohromady to je tedy $k^2\binom{n}{k}$ možností, jak vybrat $k$ organizátorů přispívajících do sborníčku a mezi nimi dva korektory. Uvážíme-li všechna přípustná $k$, dostáváme tak

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}$$

možností, jak může schůzka dopadnout.

II. způsob: Nejprve se rozhodněme, kteří organizátoři budou korektory. První situace je, že bude gramatiku i matematiku kontrolovat jeden organizátor, toho můžeme vybrat $n$ způsoby, ten podle předpokladů úlohy musí psát příspěvek do sborníčku. U zbylých $n-1$ organizátorů máme vždy 2 možnosti, jak se rozhodnout (buď příspěvek napíší, nebo nenapíší). Dohromady je to $n2^{n-1}$ možností. Druhá situace je, že budou gramatiku a matematiku kontrolovat různí organizátoři. Prvního můžeme vybrat $n$ způsoby, pro druhého zbývá $n-1$ způsobů, ti příspěvek napsat musí. U zbylých $n-2$ máme opět 2 možnosti, jak se rozhodnout (buď příspěvek napíší, nebo nenapíší). Dohromady je to $n(n-1)2^{n-2}$ možností. Spojíme-li první a druhou situaci, dostáváme

$$n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$$

možností, jak může schůzka dopadnout.

Vzhledem k tomu, že jsme počítali tentýž údaj, musí si být výrazy získané počítáním I. i II. způsobem rovny. Motivační úloha je tedy vyřešena,

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}=n(n+1)2^{n-2}.$$

**Příklad 1.** Dokažte, že pro libovolné přirozené $n$ platí

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}.$$

**Příklad 2.** Dokažte, že pro libovolná přirozená $m$, $n$, $m\le n$, platí

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}=\binom{2n}{m}.$$

**Příklad 3.** Zobecněte předchozí úlohu.

**Příklad 4.** Dokažte binomickou větu, tj. tvrzení, že pro libovolná $a$, $b$ reálná a $n$ přirozené platí

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$

**Příklad 5.** Dokažte princip inkluze a exkluze, tj. tvrzení, že pro libovolné konečné množiny $A_1$, $A_2$, … , $A_n$ platí

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}|A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}|.$$

**Příklad 6.** Spočítejte počet permutací na $n$ prvcích bez pevného bodu, tedy takových, že neexistuje $1\le i\le n$, pro které $f(i)=i$.

**Příklad 7.** Určete pro přirozená $n$ a $k$ hodnotu výrazu

$$\binom{n}{0}(n+k)^n-\binom{n}{1}(n+k-1)^n+\binom{n}{2}(n+k-2)^n+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}k^n.$$

**Příklad 8.** Dokažte, že pro libovolná přirozená $j$, $m$, $n$, $m\ge j$, platí

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{j-i}=\binom{m}{j}.$$

**Příklad 9.** Určete počet stromů[3] na $n$ rozlišitelných vrcholech (tj. izomorfní stromy, jejichž hrany jsou jinak očíslovány, považujeme za různé).

**Příklad 10.** Dokažte, že pro libovolné reálné $x$ platí

$$\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

**Příklad 11.** Nechť je dáno $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ a dále nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro $n \geq 4$ rekurentní vztah

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Dokažte, že pro každé prvočíslo $p$ je číslo $a_p$ dělitelné $p$.

**Příklad 12.** Zobecněte předchozí úlohu.

[3]Pokud nevíš, co je strom, popř. izomorfismus stromů, zajdi si za libovolným organizátorem, ten Ti to rád vysvětlí.