Počítání teček

Víťa Kala

Určitě ses už mockrát potkal(a) s nějakým takovýmto příkladem: Urči, jaký obsah má mnohoúhelník nakreslený na obrázku! A vedle zadání byl nakreslený nějaký ten mnohoúhelník, přičemž všechny jeho vrcholy byly takzvané *mřížové body*, neboli body s celočíselnými souřadnicemi. Obvykle bylo potřeba obrázek rozdělit na několik čtverců, trojúhelníků a obdélníků a sečíst jejich obsahy. To ale může být pěkná otrava, a tak pan Georg Pick v roce 1899 vymyslel mnohem chytřejší metodu.

Pickova formule říká, že obsah jednoduchého[1] mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech (říkejme mu třeba *mřížový mnohoúhelník*) můžeme spočítat takto: Označme V počet mřížových bodů, které jsou uvnitř mnohoúhelníku, a H buď počet mřížových bodů, které jsou na jeho hranici. Hledaný obsah je pak roven $V + H/2 - 1$.

To je překvapení, co? Jak by mohlo jít spočítat obsah něčeho, co může být kdovíjak složité, tak jednoduše? Jaktože vzorec vůbec nezohledňuje tvar mnohoúhelníku? Na tom přece taky záleží, ne?

Ať se nám to líbí nebo ne, Pickova formule platí. Proč tomu tak je, si vysvětlíme na přednášce, zde uveďme jen, kudy se důkaz zhruba ubírá:

(i) Platí-li Pickova formule pro nějaké dva polygony[2] se společnou částí obvodu, platí i pro polygon, který dostaneme, když je spojíme.
(ii) Vzoreček platí pro jednotkový čtverec, a tedy i pro libovolný obdélník.
(iii) Vzoreček platí i pro jakýkoli trojúhelník.
(iv) Pickova formule platí pro všechny mnohoúhelníky.

Nu, a je to (: Nejen, že teď můžeš hravě počítat obsahy, ale Pickova formule se hodí i řešení nejrůznějších příkladů. Zkus si rozmyslet následující problémky:

Příklad 1. Platí nějaká obdoba Pickovy formule i v prostoru?

Příklad 2. Dokaž, že každý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech má racionální obsah. (Každý znamená opravdu každý, tedy i nejednoduchý!)

Příklad 3. Půlbodem nazývejme libovolný bod o souřadnicích $(k/2, l/2)$, kde k a l jsou celá čísla. Každý půlbod určitě jde vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body mnoha různými způsoby.

Příklad 4. Představ si, že máš půlbod ležící uvnitř nějakého mřížového mnohoúhelníku. Dokaž, že jej můžeme dostat jako střed úsečky spojující dva mřížové body, *které samy leží uvnitř tohoto mnohoúhelníku.*

[1] Jednoduchý obrazec poznáme podle toho, že jeho obvod neprotíná sebe sama.
[2] Polygon není nic jiného než přejatý výraz pro mnohoúhelník.