Pickova formule

Jarda Hančl

Abstrakt. Příspěvek nejprve seznámí čtenáře s celou řadou tvrzení, která souvisejí s mřížovými body. V druhé části vyslovíme Pickovu formuli pro počítání obsahů mnohoúhelníků s vrcholy v mřížových bodech, naznačíme důkaz a uvedeme několik příkladů.

V příspěvku nejprve nastíníme, co to vlastně taková mřížka je, a pak vyslovíme několik složitějších zajímavých tvrzení, která mají za úkol motivovat čtenáře. V druhé části se zabýváme jedním z nastíněných problémů, Pickovou formulí. Ta tvrdí, že umíme jednoduše spočítat obsah mnohoúhelníka, jehož vrcholy leží v mřížových bodech. Konkrétněji, tento obsah závisí pouze na počtu mřížových bodů uvniř a na hranici mnohoúhelníka. Ale začněme pomaleji:

Mřížové body a jejich krása

V tomto textu budeme pracovat s množinou mřížových bodů. Než abych nějak složitě zaváděl tento pojem, vystačíme si s jeho geometrickou interpretací. Tedy budu-li mluvit o množině mřížových bodů, budu myslet body roviny (v níž mám zavedenou kartézskou soustavu souřadnic), které mají obě souřadnice celočíselné. Neboli body

$$\{[x, y] : x, y \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Nyní si ukažme řadu pěkných tvrzení, některá lehčí, jiná pekelně těžká (třeba Schinzelova věta byla dokázána před 10 lety):

(i) *Blichfeldt's Theorem:* Každý omezený rovinný obrazec M s obsahem ostře větším než A libovolně zasazený do jednotkové čtvercové mřížky může být posunut tak, aby počet mřížových bodů uvnitř M byl alespoň $A + 1$.

(ii) *Browkin's Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině čtverec, který má právě n mřížových bodů uvnitř.

(iii) *Circle Lattice Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině kruh, ve kterém leží právě n mřížových bodů.

(iv) *Steinhaus Theorem:* H. Steinhaus dokázal ještě víc. Dle jeho tvrzení pro každé n dokážeme najít kruh s obsahem n, na jehož hranici leží právě n mřížových bodů.

(v) *Schinzel Theorem:* Pro libovolné přirozené číslo n existuje v rovině kružnice, na které leží právě n mřížových bodů.

(vi) *Gauss's Circle Problem:* Označme $N(r)$ počet mřížových bodů uvnitř

Klíčová slova. Pickova formule, mřížový bod, mřížka

kruhu o poloměru r a středu v počátku. Pak platí

$$N(r) = 1 + 4\lfloor r \rfloor + 4\sum_{i=1}^{\lfloor r \rfloor} \left\lfloor \sqrt{r^2 - i^2} \right\rfloor$$

(vii) *Minkowski Convex Body Theorem:* Omezená konvexní oblast v rovině, která je symetrická kolem počátku a má obsah alespoň 4, musí obsahovat alespoň tři mřížové body. Obecněji, v n dimenzích, můžeme prohlásit, že každá omezená konvexní oblast symetrická kolem počátku, která má obsah alespoň 2^n, obsahuje alespoň tři mřížové body. Tuto větu můžeme odvodit z Blichfeldt's theorem.

(viii) Je-li $2 \leq n \leq 32$, pak umíme najít $2n$ mřížových bodů s celočíselnými souřadnicemi $x, y \in [1, n]$ takových, že žádné tři neleží na jedné přímce. Počet různých řešení (nepočítaje rotace a souměrnosti) pro $n = 2, 3, \ldots$, je $1, 1, 4, 5, 11, 22, 57, 51, 156 \ldots$ Pro velké n existuje hypotéza, že je možné vybrat nejvýše $(c + \varepsilon)n$ mřížových bodů tak, aby žádné tři neležely na společné přímce, kde $c = (2\pi^2/3)^{1/3} \doteq 1{,}87$.
Podobně největší počet mřížových bodů s celočíselnými souřadnicemi $x, y \in [1, n]$ takových, že žádné čtyři neleží na jedné kružnici, je $k(n^{2/3} - \varepsilon)$ (Guy 1994, p. 241).

Pickova formule

A nyní ke zlatému hřebu večera. Určitě ses už mockrát potkal(a) s nějakým takovýmto příkladem: Urči, jaký obsah má mnohoúhelník nakreslený na obrázku! A vedle zadání byl nakreslený nějaký mnohoúhelník, přičemž všechny jeho vrcholy byly takzvané *mřížové body*. Obvykle bylo potřeba obrázek rozdělit na několik čtverců, trojúhelníků a obdélníků a sečíst jejich obsahy. To ale může být pěkná otrava, a tak pan Georg Pick v roce 1899 vymyslel mnohem chytřejší metodu.

Pickova formule říká, že obsah jednoduchého[9] mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech (říkejme mu třeba *mřížový mnohoúhelník*) můžeme spočítat takto: Označme V počet mřížových bodů, které jsou uvnitř mnohoúhelníku, a H buď počet mřížových bodů, které jsou na jeho hranici. Hledaný obsah je pak roven $V + H/2 - 1$.

To je překvapení, co? Jak by mohlo jít spočítat obsah něčeho, co může být kdovíjak složité, tak jednoduše? Jaktože vzorec vůbec nezohledňuje tvar mnohoúhelníku? Na tom přece taky záleží, ne?

[9] Jednoduchý obrazec poznáme podle toho, že jeho obvod neprotíná sebe sama.

Ať se nám to líbí nebo ne, Pickova formule platí. Proč tomu tak je, si vysvětlíme na přednášce, zde uveďme jen, kudy se důkaz zhruba ubírá:

(i) Platí-li Pickova formule pro nějaké dva polygony[10] se společnou částí obvodu, platí i pro polygon, který dostaneme, když je spojíme.
(ii) Vzoreček platí pro jednotkový čtverec, a tedy i pro libovolný obdélník.
(iii) Vzoreček platí i pro jakýkoli trojúhelník.
(iv) Pickova formule platí pro všechny mnohoúhelníky.

Nu, a je to. Nejen že teď můžeš hravě počítat obsahy, ale Pickova formule se hodí i řešení nejrůznějších příkladů. Zkus si rozmyslet následující problémky:

Příklad 1. Platí nějaká obdoba Pickovy formule i v prostoru?

Příklad 2. Dokaž, že každý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech má racionální obsah. (Každý znamená opravdu každý, tedy i nejednoduchý!)

Příklad 3. Půlbodem nazývejme libovolný bod o souřadnicích $(k/2, l/2)$, kde k a l jsou celá čísla. Každý půlbod určitě jde vyjádřit jako střed úsečky spojující dva mřížové body mnoha různými způsoby. Představ si, že máš půlbod ležící uvnitř nějakého mřížového mnohoúhelníku. Dokaž, že jej můžeme dostat jako střed úsečky spojující dva mřížové body, *které samy leží uvnitř tohoto mnohoúhelníku*.

A na závěr bych chtěl poděkovat Víťovi Kalovi, jehož příspěvek dal tomuto první formu. Pokud byste se chtěli o mřížových bodech dozvědět více, zkuste třeba stránku `http://mathworld.wolfram.com/PointLattice.html`.

[10] Polygon není nic jiného než přejatý výraz pro mnohoúhelník.