Pellova rovnice

Alča Skálová

Úvod

Jako Pellova rovnice je známa rovnice

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

kde $D > 0$ je přirozené číslo, které není čtverec.[5] Řešení x, y hledáme v celých číslech.

Každá Pellova rovnice má triviální řešení $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$. My se ovšem s něčím takovým nespokojíme a na přednášce se zaměříme na hledání netriviálních řešení.

Proč nechceme čtverec?

Možná vám vrtá hlavou, proč v Pellově rovnici zavrhujeme $D \leq 0$ a $D = d^2$. Pro $D < 0$ existuje jen triviální řešení. Pro $D = 0$ jsou řešením všechny dvojice $(\pm 1, m), m \in \mathbb{Z}$. A pro $D = d^2, d \in \mathbb{N}$ si rovnici můžeme upravit na $x^2 - Dy^2 = x^2 - (dy)^2 = (x + dy)(x - dy)$. Aby se součin dvou přirozených čísel rovnal jedné, musí být obě závorky na pravé straně rovny ± 1, a tedy rovnice má opět jen triviální řešení.

Jak vidno, neděje se v těchto případech nic zajímavého, takže jim můžeme s lehkým srdcem říci sbohem a pustit se do mnohem zajímavějších věcí.

Jak to vypadá s řešením

Řešení budeme pro jednoduchost hledat pouze v přirozených číslech, neb není těžké si rozmyslet, že přidáním znamének k takovému řešení získáme řešení v číslech celých a naopak.

Věta. *Má-li Pellova rovnice netriviální řešení, pak jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz. Mějme nějaká dvě řešení $(a, b), (e, f) \in \mathbb{N}$ rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$. Pak dvojice (g, h) definovaná následovně

$$g + h\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(e + f\sqrt{D})$$

[5] Čili není druhou mocninou.

je také řešením. Stačí si uvědomit, že $g - h\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})(e - f\sqrt{D})$ a vhodně upravit:

$$\begin{aligned} g^2 - Dh^2 &= (g + h\sqrt{D})(g - h\sqrt{D}) \\ &= (a + b\sqrt{D})(e + f\sqrt{D})(a - b\sqrt{D})(e - f\sqrt{D}) \\ &= (a^2 - Db^2)(e^2 - Df^2) \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Což je takový důkaz s bonusem – nejen, že máme dokázáno, co jsme chtěli, ale dostali jsme i návod, jak ona další řešení sestrojit.

Abychom mohli učinit další zajímavé objevy, seznámíme se nejprve s větou, která patří spíš do trochu jiné oblasti – diofantických aproximací.[6]

Věta. (Dirichlet, část 2) *Pro každé iracionální $\alpha \in \mathbb{R}$ má nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

nekonečně mnoho racionálních řešení p/q.

Věta. (Lagrange) *Každá Pellova rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$ má netriviální řešení.*

Na důkaz se můžete těšit na přednášce. (-: Ti, co se nemohou dočkat zatím mohou zkusit využít předchozí větu (všimněte si, že $\sqrt{D}$ je v Pellově rovnici vždycky iracionální) a Dirichletova principu. A jelikož se nám tu pan Dirichlet začíná nějak příliš roztahovat, tak ho opustíme a místo toho se podíváme na to, jak nám Pellova rovnice může pomoci řešit některé obecnější.

Zobecněná Pellova rovnice

Zobecněnou Pellovou rovnicí rozumíme rovnici

$$x^2 - Dy^2 = m,$$

kde $m \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{N}$ a D není čtverec. Řešení (x, y) hledáme opět v celých číslech.

Věta. *Nechť má rovnice $x^2 - Dy^2 = m$ nějaké celočíselné řešení, pak jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz je velmi podobný důkazu první věty, akorát poslední řádek se změní na $m \cdot 1 = m$.

[6] Nenech se tím názvem vyděsit, je tu jen pro zajímavost. (-:

Literatura

Vycházela jsem ze staršího příspěvku Franty Konopeckého (najdete ho na PraSečích stránkách, odkaz knihovna) a ze skript Martina Klazara *Introduction To Number Theory*, jakož i z poznámek z jeho přednášky *Úvod do teorie čísel*.

Tímto bych chtěla oběma poděkovat.