Palindromická čísla

Michal Rušin

Palindromické číslo je „súmerné“ číslo. Jeho hodnota sa po napísaní číslic v opačnom poradí nezmení, napr. 11, 22, 3333, ale i 121, 12321, 10201 atď. Zaujímavé sú predovšetkým čísla, ktoré majú nejakú známu vlastnosť a naviac sú palindromické, napríklad:

- Palindromické prvočísla: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, … Zatiaľ najväčšie známe palindromické prvočíslo je $10^{130022} + 3761673 \cdot 10^{65008} + 1$, ktoré našiel Harvey Dubner (7.11.2004)
- Palindromické štvorce: 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, 12321, …

Palindromickým číslam sa niekedy tiež hovorí Šeherezádine čísla (napríklad 101, 1001, 10001, …)

Formálna definícia

Hoci o palindromických číslach sa najčastejšie uvažuje v desiatkovej sústave, pojem palindromické číslo môže byť aplikovaný na prirodzené čísla aj v iných sústavách.

Definícia. *Uvažujme číslo $n > 0$ v sústave o základe $b \geq 2$, kde n je zapísané štandardným spôsobom pomocom $k+1$ číslic a_i ako*

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b^i,$$

kde $0 \leq a_i < b$ pre všetky i a $a_k \neq 0$. Potom n je palindromické práve vtedy, keď $a_i = a_{k-i}$ pre každé i.

Alternatívna ale rovnocenná definícia: V ľubovoľnej sústave s pevným základom b je číslo n palindromické práve vtedy, keď platí jedna z nasledujúcich podmienok:

(i) n pozostáva z jedinej číslice
(ii) n pozostáva z dvoch rovnakých číslic
(iii) n pozostáva z troch alebo viacerých číslic, prvá a posledná číslica je rovnaká a po ich odobraní je „nová prvá“ a „nová posledná“ opať rovnaká; postup možme opakovať až kým neostane len jedna alebo dve číslice.

Desiatkové palindromické čísla

Všetky jednociferné čísla v desiatkovej sústave (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) sú palindromické. Počet dvojciferných je 9, trojciferných je už 90 atď. Všetkých palindromických čísel menších ako $10n$, $n \geq 4$ je postupne 199, 1099, 1999, 10999, 19999, 109999, 199999, 1099999, ...

Existuje zaujímavý matematický postup, ktorým sa dá dopracovať k palindromickému číslu (v desiatkovej sústave): Ak zvolíme číslo a pripočítame k nemu jeho zrkadlový obraz (to isté číslo napísané v opačnom poradí) a túto operáciu (v anglickej literatúre nazývanú 196-Algorithm) budeme opakovať, veľmi často získame po konečnom počte opakovaní palindromické číslo. Existujú však čísla, u ktorých sa nevie, či sa po konečnom počte opakovaní algoritmu dá k palindromickému číslu dostať. Príkladom sú čísla 196 (podľa ktorého sa algoritmus nazýva), 295, 394, 493 a mnoho ďalších. Počet opakovaní može byť rôzny, napr. u čísla 89 budeme potrebovať 24 krokov a výsledkom bude číslo 8813200023188.

Iné základy

Ako sme už spomenuli, o palindromických číslach môžeme uvažovať aj v iných číselných sústavách ako v desiatkovej. Napríklad, binárne palindromické čísla sú: 0, 1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111, 100001, ... tj. 0, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 21, 27, 31, 33, ...

Všeobecne, každé číslo n vieme zapísať ako palindromické vkaždej sústave so základom $b \geq n+1$ (pretože n je v týchto sústavách jednociferné) a tiež v sústave so základom $b = n-1$ (zápis n je potom 11_{n-1}). Mnoho čísel má však palindromickú reprezentáciu aj v číselnej sústave so základom menším ako $n-1$ (može ich byť aj viac), napr. číslo 105 je palindromické v piatich základoch: $1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 55_{20} = 33_{34}$. Číslo, ktoré nie je palindromické v žiadnej sústave so základom $2 \leq b < n-1$ sa nazýva *prísne nepalindromické číslo (strictly non-palindromic number).*

Príklad. Nájdite najväčší štvormiestny palindróm, ktorého druhá mocnina je tiež palindrómom.