Orientované úhly

Martin Tancer

Jistě se v geometrii často setkáte s úlohou, kde se používají obvodové nebo úsekové úhly. Jejich velikost silně závisí na tom, ve které polorovině jaké body leží, a tak se nezřídka stává, že řešitel musí rozebírat 2, 4, 8, 16, 32, … možností, když daný příklad řeší. Používáním orientovaných úhlů tato diskuse odpadá, některé příklady lze tedy řešit výrazně rychleji.

Definice. *Orientovaným úhlem (p, q) dvou přímek p, q (v tomto pořadí) nazveme úhel, o který je třeba otočit p (v kladném směru), aby otočená p byla rovnoběžná (či totožná) s q. Dovolujeme přitom také otáčení o nulový úhel (identita) a o záporný úhel (o absolutní hodnotu tohoto úhlu v záporném směru).*

Lemma. (Základní vlastnosti)
(i) $(p, q) = -(q, p)$,
(ii) $(p, q) + (q, r) = (p, r)$,
(iii) $(p, q) = (p, q) + k \cdot 180^\circ$*, kde k je celé číslo.*
Můžeme tedy předpokládat, že $(p, q) \in \langle 0^\circ, 180^\circ)$.

Lemma. *Pokud α, β, γ jsou vnitřní (neorientované) úhly trojúhelníku ABC, potom nastává jedna ze dvou možností:*
(a) $\left(\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}\right) = \alpha,\ \left(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}\right) = \beta,\ \left(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}\right) = \gamma;$
(b) $-\left(\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}\right) = \alpha,\ -\left(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}\right) = \beta,\ -\left(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}\right) = \gamma.$

Věta. (O obvodovém úhlu pro neorientované úhly) *Různé body A, B, C, X leží na jedné kružnici právě tehdy, když žádné tři neleží na přímce a buďto $X \in \overrightarrow{ACB}$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AXC|$ nebo $X \notin \overrightarrow{ACB}$ a $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - |\sphericalangle AXC|$.*

Věta. (O obvodovém úhlu pro orientované úhly) *Různé body A, B, C, X leží na jedné kružnici právě tehdy, když žádné tři neleží na přímce a $\left(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}\right) = \left(\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{XC}\right)$.*

Věta. (O úsekovém úhlu pro neorientované úhly) *Přímka BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když X není bodem přímky AB a buďto $X \notin \overrightarrow{ABC}$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABX|$ nebo $X \in \overrightarrow{ABC}$ a $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle ABX|$.*

Věta. (O úsekovém úhlu pro orientované úhly) *Přímka BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $\left(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{CB}\right) = \left(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BX}\right)$.*