Ordinály, kardinály - taková zvláštní čísla

Robert Šámal

Kardinální čísla

Kardinální i ordinální čísla jsou jistým zobecněním pojmu čísel přirozených. Abychom mohli přirozená čísla zobecnit, musíme si napřed uvědomit, co takové číslo udává. První odpovědí, která člověka napadne, je počet nějakých objektů. Číslo 5 udává, že někde je pět hruštiček. Zobecněním tohoto pojmu získáme takzvaná kardinální čísla.

Nejprve si musíme říci, jak poznáme, že dvě množiny mají stejný počet prvků. K tomu potřebujeme pojem prosté funkce a bijekce. Funkci $f : A \to B$ budeme chápat intuitivně jako nějaké přiřazení, které každému prvku $a \in A$ přiřazuje prvek $f(a) \in B$. Funkce f je *prostá*, pokud neslepuje žádné body, tj. pro $a_1 \neq a_2$ je i $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkce f je *bijekce*, pokud je prostá a navíc každý prvek množiny B je obrazem nějakého prvku množiny A (f je tzv. *surjektivní*, neboli *na*).

Nyní už můžeme říci, že množina A má nejvýše tolik prvků, jako B (píšeme $A \preceq B$), pokud existuje nějaké prosté zobrazení $f : A \to B$. Dále řekneme, že A a B mají stejný počet prvků ($A \approx B$), pokud existuje dokonce bijekce $f : A \to B$. Ještě řekneme, že A má méně prků než B ($A \prec B$), pokud $A \preceq B$ a $A \not\approx B$.

Tím jsme si řekli, kdy mají dvě množiny stejný počet prvků, ale ještě nevíme, co ten počet vlastně je. Bude to jedna vybraná množina s daným počtem prvků, např. pětiprvkové množiny budou mít počet prvků 5, přičemž 5 bude vhodná pětiprvková množina (konkrétně $\{0, 1, 2, 3, 4\}$). A počty prvků, to jsou právě *kardinální čísla*, krátce kardinály.

Jaké kardinály máme? Velikosti konečných množin udávají přirozená čísla, tedy každé přirozené číslo je kardinál (ono to není sice úplně jasné, mohli jsme si totiž vybrat jinou pětiprvkovou množinu než číslo pět, ale do přesné definice se zde nebudu pouštět). Nejmenší nekonečný kardinál označuje velikost množiny přirozených čísel, značí se $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Sice to pro nás není důležité, ale poznamenejme, že $\aleph_0$ je přímo množina přirozených čísel (s nulou). Nejbližší vyšší kardinál se značí $\aleph_1$, $\aleph_2$, … Dá se dokázat, že reálných čísel je *nespočetně*, tj. více než $\aleph_0$. Tzv. hypotéza kontinua říká, že je jich přesně $\aleph_1$. Tuto hypotézu však kupodivu nelze dokázat ani vyvrátit, reálných čísel může klidně být $\aleph_{17}$. Počet reálných čísel proto značíme symbolem $\mathscr{C}$ (jako kontinuum, vlastně continuum).

Nyní, když už víme, co to kardinály jsou, je potřeba se s nimi naučit zacházet: porovnávat je, sčítat, násobit, … Lehce vidíme, že pro každé dvě množiny je $A \preceq B$ nebo $B \preceq A$. Důležitá věta Cantor–Bernsteinova říká, že pokud platí obojí, tak už $A \approx B$. Dostáváme, že pro každé dva kardinály κ, λ je buď $\kappa < \lambda$, $\kappa = \lambda$ nebo $\kappa > \lambda$, čili kardinály jsou uspořádány lineárně.

Operace s kardinály definujeme zcela přirozeným způsobem. Součtem kardinálů $\kappa + \lambda$ nazveme velikost sjednocení dvou disjunktních množin o velikosti κ a λ. Součin $\kappa \cdot \lambda$ je velikost kartézského součinu a konečně mocnina κ^λ je počet funkcí z množiny velikosti λ do množiny velikosti κ. Když to zapíšeme formálně, dostaneme:

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}| \\ \kappa \cdot \lambda &= |\kappa \times \lambda| \\ \kappa^\lambda &= |\{f : \lambda \to \kappa\}| \end{aligned}$$

To by nám ovšem k ničemu nebylo, kdybychom uvedené operace neuměli spočítat. U operace mocniny tomu tak skutečně je, o mocnění kardinálů toho mnoho říci nemůžeme. Součet a součin jsou ale snadné. Pro každé dva nekonečné kardinály totiž platí překvapující tvrzení

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

O tom, jak by se takové tvrzení dalo dokázat, jakož i o tom, jak ho lze výhodně použít, si řekneme na přednášce.

Ordinální čísla

Druhou informací, kterou nám přirozená čísla poskytují, je uspořádání několika objektů: číslo 5 nám říká, že někde je pět předmětů v řadě za sebou. Možná vám to přijde jako hloupost, ale uvědomte si, že to je ta vlastnost, která nám umožňuje používat matematickou indukci: můžeme probírat přirozená čísla jedno po druhém. U přirozených čísel není vidět rozdíl oproti minulému přístupu, ale zobecníme-li toto na nekonečné množiny, rozdíly se dostaví. Napřed ale potřebujeme několik pojmů.

Asi znáte pojem uspořádání: řekneme, že $<$ je ostré lineární uspořádání množiny X, pokud

- $\forall x, y, z \in X \quad x < y \;\&\; y < z \Rightarrow x < z$
- $\forall x \in X \quad x \not< x$
- $\forall x, y \in X \quad x < y \vee x = y \vee x > y$

Dále řekneme, že toto uspořádání je dobré, pokud každá $A \subseteq X$ má nejmenší prvek, tj. existuje takové $a \in A$, že pro všechna $b \in A$ je $a < b$ nebo $a = b$. Rozmyslete si, že běžné uspořádání množiny přirozených čísel je dobré, množiny celých čísel nikoliv.

Dvě uspořádané množiny nazveme *izomorfní* („stejné"), pokud mezi nimi existuje bijekce f taková, že $x < y$ právě tehdy, když $f(x) < f(y)$. Například množina přirozených čísel a množina celých čísel větších než -37 jsou izomorfní. A konečně *ordinál* je to, co mají izomorfní dobře uspořádané množiny společného, čili např. jedna z těchto množin. Tento ordinál nazveme *typ* tohoto uspořádání. Konkrétně ordinál 5 bude opět množina $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s přirozeným uspořádáním.

Podívejme se na čísla, která jsme takto dostali. Každé přirozené číslo je ordinálem, prvním nekonečným ordinálem je množina přirozených čísel, která se v této situaci značí ω, případně ω_0. Další ordinál je však mnohem menší, než další kardinál! Má stejně prvků jako ω, objevíte ho?

Pro ordinály se dá dokázat, že (podobně jako pro kardinály) pro každé dva ordinály α, β platí $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ nebo $\alpha > \beta$. Přitom $\alpha < \beta$ znamená, že α je isomorfní nějakému počátečnímu úseku β. Dále můžeme definovat sčítání, násobení a umocňování: schválně zkuste sami přijít na to, jak to udělat (upozornění: operace s kardinály a s ordinály nevyjdou stejně!).

Transfinitní indukce

Chceme dokázat nějaký výrok $V(\alpha)$ pro každý ordinál α. To můžeme dělat různě, ale pokud použijeme transfinitní indukci, tak stačí udělat následující:

- dokázat $V(0)$ (to je obvykle triviální)
- dokázat $V(\alpha)$, pokud víme, že pro každé $\beta < \alpha$ platí $V(\beta)$.

O tom, proč je tento postup oprávněný a hlavně o tom, jak ho lze použít na dokázání zajímavých tvrzení, si povíme na přednášce. Pokud se budete chtít o kardinálech, ordinálech a příbuzných tématech dozvědět více, můžete se podívat do knihy *B. Balcar, P. Štěpánek: Teorie množin*, některé knihovny ji možná mají. Ale varuji: rozhodně to není lehké čtení!