Omega 1

Mirek Olšák

Abstrakt. Do nekonečna napočítá každý Chuck Norris, ale do nespočetna, to už je jiná... Zkonstruujeme nejmenší nespočetnou množinu, ukážeme si její analogie s množinou přirozených čísel a další zajímavé vlastnosti.

Definice. Lineární uspořádání na množině M je **Laicky:** něco, co nám pro libovolné různé dva prvky z M řekne, který z nich je větší a který menší, a přitom není možné vyrobit rostoucí cyklus. **Formálně:** nějaká podmnožina U kartézského součinu $M \times M$ taková, že pro každé a, b, $c \in M$ platí:

(i) Platí právě jeden z výroků $a < b$, $b < a$, $a = b$.
(ii) Pokud $a < b$ a $b < c$, pak $a < c$.

Zápisem $a < b$ (a, $b \in M$) rozumíme $(a, b) \in U$.

Úmluva. Mluvíme-li o uspořádané množině M, máme na mysli množinu M a na ní nějaké dané uspořádání.

Definice. Říkáme, že dvě uspořádané množiny A, B jsou isomorfní, pokud **Laicky:** mají stejnou strukturu. **Formálně:** existuje mezi nimi isomorfismus, tj. bijektivní zobrazení $\varphi : A \to B$, které pro libovolná a, $b \in A$ splňuje $a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$.

Definice. *Dobré uspořádání* na množině M je takové lineární uspořádání na M, ve kterém má každá neprázdná podmnožina M nejmenší prvek.

Definice. Počátkem lineárně uspořádané množiny M daným prvkem $a \in M$ rozumíme množinu všech prvků M ostře menších než a, na které uvažujeme stejné uspořádání jako na M.

Tvrzení. *Dobře uspořádaná množina není isomorfní s žádným svým počátkem.*

Věta. *Pro libovolné dvě dobře uspořádané množiny A, B platí právě jedna z možností:*

(i) *A a B jsou isomorfní.*
(ii) *A je isomorfní s nějakým počátkem B. (tedy A je menší)*
(iii) *B je isomorfní s nějakým počátkem A. (tedy A je větší)*

Klíčová slova. teorie množin, dobré uspořádání, ordinální číslo

Definice. Říkáme, že množina M je spočetná, jestliže existuje prosté zobrazení z M do přirozených čísel (tedy i konečné množiny jsou spočetné). V opačném případě říkáme, že je množina M nespočetná.

Tvrzení. *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

Definice. Přichází slibovaná množina:

Laicky: Množinou ω_1 (čteno omega 1) rozumíme množinu všech možných neisomorfních dobrých uspořádání na spočetných množinách. Prvky této množiny uspořádáme pomocí předchozí věty.

Formálněji: Uvažujme množinu X všech možných dobrých uspořádání na všech možných podmnožinách přirozených čísel. To proto, abychom k libovolné spočetné dobře uspořádané množině mohli najít nějaký prvek X, který s ní je isomorfní. Jenže takových prvků bude zpravidla více, proto vyrobíme ještě množinu[1] ω_1, která bude obsahovat celé množiny isomorfních prvků z množiny X (dělíme X na třídy ekvivalence). Dále pro dva prvky a, $b \in \omega_1$ řekneme, že $a < b$, jestliže nějaký prvek z a je isomorfní s počátkem nějakého prvku z b.

Tvrzení. *Každý prvek ω_1 je isomorfní s počátkem, který sám určuje.*

Tvrzení. *Množina ω_1 je dobře uspořádaná.*

Tvrzení. *Množina ω_1 je nespočetná.*

Tvrzení. *Každý prvek ω_1 dělí tuto množinu na spočetně mnoho menších prvků a nespočetně mnoho větších.*

Tvrzení. *Množina ω_1 je nejmenší nespočetná, neboli každá její podmnožina je buďto spočetná, nebo isomorfní s ω_1.*

Hypotéza. (kontinua) *Existuje prosté zobrazení z reálných čísel do ω_1.*

Definice. Podmnožina S množiny ω_1 je omezená, pokud existuje prvek $m \in \omega_1$ (nazýváme ho mez), že žádný prvek množiny S není větší než m.

Tvrzení. *Kdyžž je podmnožina ω_1 spočetná, je omezená.*

Definice. Podmnožinu S množiny ω_1 nazýváme *uzneom*[2], pokud není omezená a nejmenší mez každé neprázdné omezené podmnožiny množiny S leží v S.

Tvrzení. *Žádné dva uzneomy nejsou disjunktní.*

Tvrzení. *Průnik spočetně mnoha uzneomů je opět uzneom.*

Tvrzení. *Buď φ isomorfismus zobrazující ω_1 na daný uzneom. Pak množina pevných bodů φ je zase uzneom.*

Tvrzení. *Nechť pro všechna $x \in \omega_1$ je $S(x)$ uzneom, který obsahuje všechny prvky menší než x. Pak průnik všech těchto uzneomů je (kdo by to čekal) uzneom.*

[1] Ve skutečnosti to není pravá ω_1, ale je s ní isomorfní.

[2] uzavřená neomezená