Obsah trojúhelníku

Michal Beneš

Vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku jistě každý z vás zná. Otázkou je, zda jej umíte také dokázat. Nepochybuji, že jste už několik „důkazů“ slyšeli. Jsou to ale skutečně důkazy? Vždyť například vychází z toho, že posunutím se obsah trojúhelníku nezmění. Je něco takového zřejmější, než dokazovaný vzoreček? A platí to vůbec?

Mohu vás uklidnit, posouváním se obsah trojúhelníku skutečně nezmění. Ale je to tak samozřejmé? Ponořím-li pouťový balónek 10 metrů pod vodu, zmenší se jeho objem dvakrát. Jiný příklad: sbalený stan zabírá mnohem méně místa, než rozbalený, přestože je složen z přesně stejných dílů. Proti oběma těmto příkladům můžete samozřejmě ledacos namítat, ale oba mají svůj smysl. Nevěřící nechť provedou experiment s deseti stany v jednom obývacím pokoji u nich doma.

Závěr by měl být asi následující: Chceme-li něco dokázat o obsahu, měli bychom nejprve vědět, co slovem obsah míníme (jaký je obsah slova „obsah“). Intuitivní představa je, že obsah je nějaké číslo, které nám udává velikost daného objektu. Připomeňme ale, že výraz „velikost“ lze chápat různě. U lidí máme většinou na mysli výšku, u vody objem, u trestu odnětí svobody délku a třeba u daňového podvodu množství peněz. Také v matematice velikost může pokaždé znamenat něco jiného, jednou délku, podruhé objem, potřetí počet prvků množiny.

Chceme-li mluvit o velikosti, musíme tento pojem přesněji definovat. Nejdůležitější je uvědomit si, co chceme měřit. Mějme tedy libovolnou množinu X a množinu některých jejích podmnožin $\mathscr{A}$. Měřit budeme množiny z $\mathscr{A}$. *Mírou* pak rozumíme funkci $\mu : \mathscr{A} \to \langle 0, \infty)$. Tato funkce každé množině z $\mathscr{A}$ přiřadí její velikost. Všiměte si, že některým množinám přiřadíme i „číslo“ nekonečno, nenechte se tím zastrašit, pro počítání s nekonečnem platí přirozená pravidla. Jistě je vám ale jasné, že μ není libovolná funkce. Rozhodně by měla platit tato dvě pravidla:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$: míra prázdné množiny je nula.
(2) *aditivita:* Pro libolnou n-tici disjunktních množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ z $\mathscr{A}$ platí

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n).$$

Tedy míra sjednocení disjunktních množin se rovná součtu jejich měr.

Při zkoumání vlastností míry by se nám mohla hodit vlastnost (2) i pro nekonečné systémy množin. To se dá (možná trochu nesrozumitelně) napsat tak, že pro každý systém po dvou disjunktních množin $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z $\mathscr{A}$ platí

(2*) *σ-aditivita:* $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Vzhledem k tomu, že má platit (1), je podmínka (2) speciálním případem podmínky (2*).

Nyní si ukažme, jak vypadají míry v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro jistotu připomínám, že jednorozměrný euklidovský prostor je přímka, dvourozměrný rovina, třírozměrný je, nám dobře známý, prostor, ve kterém pohybujeme, ale lze jít i dále (pozor nepleťte si čtyřrozměrný euklidovský prostor s pojmem prostoročas, jedná se o úplně jiné věci). Krychlí v jednorozměrném prostoru rozumíme úsečku, ve dvourozměrném prostoru čtverec, atd. ... Jednotkovou krychlí rozumíme množinu bodů, jejíž všechny souřadnice leží mezi 0 a 1. Například v jednorozměrném prostoru je to úsečka $\langle 0, 1\rangle$.

Položme na míru μ_n v $\mathbb{R}^n$ dva dodatečné předpoklady

(3) *normovanost:* Je-li K_n jednotková krychle v $\mathbb{R}^n$, pak platí $\mu_n(K_n) = 1$.

(4) *invariance vůči shodnostem:* Jsou-li A, B dvě shodné (shodností rozumím zobrazení zachovávající délky) množiny z $\mathscr{A}$, pak $\mu_n(A) = \mu_n(B)$.

Nyní se chvíli zabývejme otázkou, zda vlastnosti (1), (2), (2*), (3), (4) dobře charakterizují to, co obvykle považujeme za objem. Nejprve se musíme ptát, jestli vůbec nějaká funkce μ_n splňující tyto vlastnosti existuje. Odpověď samozřejmě zní, že ano. Stačí vzít $\mathscr{A} = \{\emptyset, K_n, \mathbb{R}^n\}$. Taková míra by nás asi příliš neuspokojila, neboť pomocí ní neumíme změřit příliš mnoho množin. Pokusme se tedy položit $\mathscr{A}$ množinu všech podmnožin euklidovského prostoru.

Dojdeme k velikému zklamání. Míra s vlastnostmi (1), (2*), (3), (4) neexistuje vůbec. Míra s vlastnostmi (1), (2), (3), (4) existuje jen na přímce (měření délky) a v rovině (měření obsahů), tato míra však není uvedenými podmínkami jednoznačně určena. U některých množin tedy neexistuje rozumný způsob, jak určit jejich míru (nejen, že to neumíme, ale z jistých hlubších důvodů to vůbec nelze!).

Řešení se skrývá v tom, najít dostatečně, ale ne příliš, velkou množinu $\mathscr{A}$.

Definice. *Řekneme, že $\mathscr{A}$ je σ-algebra na množině X, pokud*

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$, $X \in \mathscr{A}$

(ii) *Je-li $A \in \mathscr{A}$, pak také $X \setminus A \in \mathscr{A}$ (doplněk množiny A v X náleží do $\mathscr{A}$).*

(iii) *Jsou-li $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ množiny z $\mathscr{A}$, pak $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.*

Dvojici $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ nazveme měřitelný prostor.

Ukazuje se, že σ-algebry jsou velmi vhodné „životní prostředí“ pro míry. To nás vede k této definici:

Definice. *Buď $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ měřitelný prostor. Množinovou funkci $\mu : \mathscr{A} \to \langle 0, \infty\rangle$ nazveme mírou, pokud splňuje předpoklady (1), (2*). Trojici $\langle X, \mathscr{A}, \mu\rangle$ nazýváme prostor s mírou.*

V případě $X = \mathbb{R}^n$ bereme za $\mathscr{A}$ nejmenší σ-algebru obsahující všechny koule (nebo kruhy resp. úsečky v dimenzi 2 resp. 1). Tj. takovou σ-algebru, pro kterou platí, že s odebráním jediného prvku vynucuji odebrání nějaké koule. Dá se ukázat, že do takové σ-algebry již patří všechna tělesa a obrazce, o kterých jste se učili ve škole. Patří sem ale také některé „divočejší" množiny, jako třeba množina bodů, které mají alespoň jednu souřadnici racionální. Tuto σ-algebru nazýváme σ-algebrou borelovských množin a značíme ji $\mathscr{B}^n$.

Míru v měřitelném prostoru $\langle \mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n \rangle$ splňující podmínky (3) a (4) nazýváme n-rozměrnou Lebesgueovou mírou. Obvykle ji značíme λ^n nebo krátce λ. Poznamenávám, že stejnou míru dostaneme, pokud se v podmínce (4) místo libovolných shodností omezíme jen na posunutí.

Podívejme se, není-li ještě nějaká smysluplná možnost, jak rozšířit systém množin, které umíme měřit.

Definice. *Buď $\langle X, \mathscr{A}, \mu \rangle$ prostor s mírou. Označme $\mathscr{A}_0$ systém množin $E \subset X$, pro které existují množiny $A, B \in \mathscr{A}$ splňující $A \subseteq E \subseteq B$, $\mu(A) = \mu(B)$. Označme dále μ_0 množinovou funkci $\mathscr{A}_0 \to \langle 0, \infty \rangle$ takovou, že $\mu_0(E) = \mu(A) = \mu(B)$ pro $E \in \mathscr{A}_0$ a A, B z definice $\mathscr{A}_0$. Množinu $\mathscr{A}_0$ nazýváme zúplněním σ-algebry $\mathscr{A}$ a funkci μ_0 nazýváme zúplněním míry μ.*

Za domácí cvičení si dokažte, že $\langle X, \mathscr{A}_0, \mu_0 \rangle$ je korektně definovaný prostor s mírou.

V případě zúplňování prostoru $\langle \mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \lambda^n \rangle$ obvykle píšeme λ^n namísto λ_0^n. Mluvíme-li o Lebesguově míře, máme téměř vždy na mysli její úplnou verzi. Pro zajímovost uvádím, že opět není příliš těžké ukázat $\mathscr{B}^n \subsetneq \mathscr{B}_0^n$.

Tím jsme v naší přednášce došli až k pojmu Lebesgueovy míry. Tato míra souhlasí s naším přirozeným pojmem objem, její nevýhodou ale je, že „neumí" změřit všechny množiny. To, co jsme si ukázali, je jen zlomek celé teorie, kterou je okolo měření množin v euklidovských prostorech potřeba udělat — a to jsme ještě všechna tvrzení uváděli bez důkazů (konečně, byla nám vymezena jen malá část prostoročasu). Například jsme se vůbec nezmínili o souvislosti měr v prostoru $\langle \mathbb{R}^n, \mathscr{B}_0^n \rangle$ s mírou λ^n, nezavedli jsme integrál a neuvedli jeho souvislost s měřením množin.

Až tedy zas někdy budete používat vzoreček na výpočet obsahu trojúhelníku, vzpomeňte si, kolik práce za ním stojí.