Obsah trojúhelníku a jiných množin

Pavel Podbrdský

Úvod

Jednou ze základních otázek geometrie je umět určovat obsah (délku, objem) dané množiny. Jistě každý z vás umí spočítat obsah daného trojúhelníku. Pro „jednoduché“ množiny není složité zavést konsistentní vzorečky. Jak ale definovat obsah kruhu nebo ještě složitějších množin? A co povrch koule? Těmito a podobnými otázkami se budeme na přednášce zabývat. Uvidíme, že problém není tak jednoduchý, jak by se mohlo na první pohled zdát.

Míra

Míra je matematický objekt – zobrazení, které dané množině přiřazuje nezáporné reálné číslo (nebo nekonečno). Motivací pro tento pojem může být např. objem či hmotnost daného tělesa, počet atomů sodíku, které dané těleso obsahuje apod. Důležité vlastnosti, které po dané míře požadujeme jsou zejména nezápornost (žádná množina nemá záporný objem, hmotnost či počet atomů sodíku), aditivita (vezmeme-li několik disjunktních množin, jejich sjednocení má míru danou součtem měr jednotlivých množin) a monotonie (větší – ve smyslu inkluze – množina nemůže mít menší míru). Také musíme mít dán systém množin, které umíme měřit.

Definice. (σ-algebra) *Nechť P je množina. Systém $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(P)$ podmnožin množiny P nazveme σ-algebrou, pokud splňuje následující vlastnosti:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A},\ P \in \mathcal{A}$.

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow P \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) $A_k \in \mathcal{A}, k = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(P, \mathcal{A})$ nazveme měřitelný prostor.

Definice. (Měřitelný prostor) *Nechť $(P, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkci $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ nazveme mírou, pokud splňuje následující vlastnosti:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$.

(3) $A_k \in \mathcal{A}, k = 1, 2, \dots, A_k$ *po dvou disjunktní, pak* $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Trojici $(P, \mathcal{A}, \mu)$ nazveme prostor s mírou.

Poznámka. Vlastnosti (1) a (2) v předchozí definici snadno plynou z vlastnosti (3) a nezápornosti míry, uvádíme je v definici jen pro větší přehlednost.

Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$

Nyní se budeme zabývat jen měřením objemů (délek, obsahů) podmnožin Eukleidovského prostoru. Od míry, která by měla vyjadřovat pojem objemu, přirozeně očekáváme další vlastnosti. Zejména je to invariance objemu vůči shodným zobrazením (posunutí, otočení, zrcadlení apod.). Dále bychom chtěli, aby objem kvádru byl roven součinu délek jeho hran.

Definice. (Interval) *Každou množinu $I \subset \mathbb{R}^n$ tvaru $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset R$ jsou (jednorozměrné) intervaly, nazveme interval. Interval I nazveme otevřený, pokud jsou všechny intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n$ otevřené, a uzavřený, pokud jsou všechny intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n$ uzavřené. Délkou jednorozměrného intervalu s koncovými body a a b rozumíme číslo $b-a$ a objemem intervalu $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ rozumíme součin délek intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_n$.*

Zajímavá otázka je, jestli taková míra na $\mathbb{R}^n$ vůbec existuje. Vše záleží na volbě σ-algebry množin, jejichž objem budeme chtít znát. Pokud zvolíme $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$, pak najdeme mnoho měr s požadovanými vlastnostmi. Pokud bychom zvolili $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, budeme zklamaní, jak je obsaženo v následující větě:

Věta. (Vitali) *Neexistuje míra na prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$, která přiřazuje každému intervalu jeho objem a která je invariantní vůči shodným zobrazením.*

Pokud bychom podmínku (3) v definici míry omezili pouze na konečné systémy množin, dostali bychom definici tzv. *konečně aditivní míry*. Konečně aditivní objemové míry, které fungují na σ-algebře všech podmnožin, existují pouze v $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$, ale nejsou pro některé množiny určeny jednoznačně. V případě $n \geq 3$ již máme smůlu díky následující překvapivé větě:

Věta. (Banachův-Tarského paradox) *Buď $B(x, r)$ otevřená koule o středu x a poloměru r. Existuje konečně mnoho po dvou disjunktních množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ takových, že množiny A_l a B_l, $l = 1, 2, \ldots, k$ jsou shodné a platí*

$$\bigcup_{l=1}^{k} A_l = B(0,1) \quad \text{a} \quad \bigcup_{l=1}^{k} B_l = B(3,2).$$

Východiskem z této situace je smířit se se skutečností, že nebudeme umět měřit objem každé podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a omezit se na nějakou menší, ale stále ještě dostatečně velkou σ-algebru podmnožin.

Definice. (Borelovské množiny) *Nejmenší σ-algebru podmnožin $\mathbb{R}^n$, která obsahuje každý interval, budeme značit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a nazývat σ-algebrou borelovských množin. Množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nazveme borelovskou.*

Cvičení. Zkuste dokázat, že každá otevřená (uzavřená) koule v $\mathbb{R}^n$ je borelovská množina.

Věta. *Existuje právě jedna míra λ^n na měřitelném prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, která přiřazuje každému intervalu jeho objem. Tuto míru nazýváme Lebesgueovou mírou na $\mathbb{R}^n$. Tato míra je invariantní vůči shodným zobrazením.*

Lebesgueovu míru lze ještě rozšířit na poněkud větší systém množin následujícím postupem: Množinu M, pro kterou existují borelovské množiny A, B takové, že $A \subset M \subset B$ a $\lambda^n(B \setminus A) = 0$ nazveme *měřitelnou*. Existují měřitelné množiny, které nejsou borelovské. Lze celkem snadno dokázat, že množinový systém $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ všech měřitelných množin je σ-algebra a že míra λ^n lze rozšířit na $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ předpisem $\lambda^n(M) = \lambda^n(A) = \lambda^n(B)$.

Nyní již snadno dokážeme vzoreček pro obsah trojúhelníku, objem čtyřstěnu apod. U složitějších množin, jako např. koule, elipsoid je to komplikovanější. K tomu, aby bylo možné jednoduchým způsobem odvodit jejich objem, je potřeba vybudovat sofistikovanější aparát, např. nějakou teorii integrálu. To však přesahuje rámec této přednášky.

Míra „křivých“ množin

Zvědavého čtenáře jistě neuspokojí, že ví, jak měřit objem některých podmnožin $\mathbb{R}^n$. Naším cílem nyní bude umět měřit např. (dvourozměrný) povrch koule apod. Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ se naskýtají dvě základní otázky. První z nich je určení dimenze množiny M. Druhá z nich je při určené dimenzi určit „velikost“ (k-rozměrný objem) množiny M. Je několik přístupů k řešení této otázky. Základní a v aplikacích nejužitečnější je definice tzv. Hausdorffovy dimenze a Hausdorffovy míry. Výhodou Hausdorffovy míry je, že umí měřit i množiny neceločíselných dimenzí.

Definice. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\delta > 0$. Řekneme, že systém $A_k \subset \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$ δ-pokrývá M, pokud $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ a pokud $\operatorname{diam} A_k < \delta$, $k = 1, 2, \dots$ Nechť dále*

$d \geq 0$ je reálné číslo. Definujeme množinovou funkci

$$\mathcal{H}^d_\delta(M) = \inf\{\alpha_d \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_k)^d,\ A_k\ \delta\text{-pokrývají } M\},$$

kde α_d je pevná vhodná konstanta a

$$\mathcal{H}^d(M) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^d_\delta(M).$$

Množinovou funkci H^d nazveme Hausdorffovou d-rozměrnou vnější mírou na $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. Funkce $\mathcal{H}^d$ není míra na všech podmnožinách $\mathbb{R}^n$. Je potřeba se omezit na menší systém podmnožin, podobně jako v případě Lebesgueovy míry.

Věta. *Nechť $d \leq n$ je přirozené číslo a nechť $M \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina v $\mathbb{R}^d$. Pak $\mathcal{H}^d(M) = \lambda^d(M)$.*

Poznámka. Předchozí věta platí jen při vhodné volbě konstanty α_d v definici Hausdorffovy míry. V případě, že d je přirozené číslo je potřeba volit α_d jako objem d-rozměrné koule o průměru 1.

Věta. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak existuje jednoznačně určené reálné číslo d, $0 \leq d \leq n$ takové, že pro $d' > d$ je $\mathcal{H}^{d'}(M) = 0$ a pro $d' < d$ je $\mathcal{H}^{d'} = \infty$. Číslo d se nazývá Hausdorffova dimenze množiny M.*

Na přednášce si ještě ukážeme, že každá spočetná množina má Hausdorffovu dimenzi 0 a dále si ukážeme nějakou množinu neceločíselné dimenze. Pokud ještě zbyde čas, ukážeme si některý z alternativních způsobů definice míry „křivých“ množin.