Objevování neeukleidovské geometrie

Šárka Štěpánová

Když Eukleidés pokládal základy geometrie, stanovil 5 postulátů, mínil tím zřejmé pravdy, a na nich pak vystavěl celou geometrii (dnes říkáme eukleidovskou).

(1) Od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu lze vésti eutheiu.
(2) Eutheiu lze nepřetržitě prodloužit.
(3) Z jakéhokoli středu jakýmkoli poloměrem lze sestrojit kruh.
(4) Všechny pravé úhly jsou navzájem stejné.
(5) Když dvojice eutheí proťata třetí eutheiou tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ony dvě euthey, prodlouženz jsouce do nekonečna, sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

(Eutheiou míní Eukleidés přímou čáru - něco mezi úsečkou a přímkou) Později byl pátý postulát přeformulován do podoby, jak ho známe dnes:

(5*) Bodem, který neleží na dané přímce lze vésti právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

Problém pátého postulátu je snad stejně starý jako postulát sám. Již v době Eukleida se totiž vyskytl názor, že tento postulát není zřejmou pravdou, ale tvrzením, které je by mělo být dokazatelné z prvních čtyř postulátů.

Mnoho matematiků se pokoušelo tento postulát dokázat. My se podíváme na pět (na první pohled snad nejpřesvědčivějších) „důkazů“ a na přednášce v nich budeme hledat chyby.

• Posidonios (?135-?50 př.n.l.) stanovil novou definici rovnoběžky, ze které je 5. poslulát snadno vyvoditelný.

• Ptolemaios Klaudius (?100-?178) použil k „důkazu“ rozbor možností velikostí úhlů, které svírají rovnoběžky s přímkou k nim různoběžnou.

• Proklos Diadochos (410-485) sestrojil k dané přímce p pomocí různoběžky r další přímku q tak, aby součet úhlů sevřených přímkami p a r a přímkami q a r byl 180 stupňů, a tvrdí, že jakákoli jiná přímka různá od q nemůže být rovnoběžná s p (samožřejmě uvažujeme jen přímky procházející nějakým předem daným bodem).

• Ibn-Quarra (830-901) tvrdil, že rovnoběžkou (jedinou) k dané přímce je přímka utvořená z polopřímek vycházejících z daného bodu, přičemž každá z těchto dvou polopřímek je taková, že tvoří hranici mezi polopřímkami, které se k dané přímce přibližují a polopřímkami, které se od dané přímky vzdalují.

• Luis Bertrand (1731-1812) dokazuje 5. postulát sporem. Uvažuje existenci dvou různých rovnoběžek (k dané přímce, procházející daným bodem). Úhel sevřený těmito dvěma rovnoběžkami je celý uvnitř pásu tvořeného danou římkou a „vzdálenější“ rovnoběžkou. Ale pásů se do roviny vejde nekonečně mnoho, zatímco nenulových úhlů jen konečně mnoho. To je spor.

• Johann Henrich Lambert (1728-1777) byl první, kdo vyvodil mnoho tvrzení plynoucích z předpokladu, že 5. postulát neplatí, ale sám nikdy neuvěřil, že 5. postulát nelze odvodit.

Ale, jak už dnes víme, neeukleidovská geometrie nakonec „objevena“ přece jen byla. Pro úplnost dodejme, že se to nezávisle podařilo hned třem lidem: v roce 1829 to byl Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, v roce 1832 Janos Bolyai a Karl Friedrich Gauss, který byl pravděpodobně první, ale svůj objev dlouho tajil.