O hranici neporiadku

PETER „πTR“ KORCSOK

MOTTO. *Akokoľvek sa budeš snažiť, absolútny neporiadok neurobíš ;)*

ABSTRAKT. Dirichletov princíp je silný dôkazový nástroj, ktorý má široké využitie v najrôznejších oblastiach matematiky. V príspevku je metóda predvedená na dvoch riešených úlohách a čitateľovi je ďalej ponúknutá možnosť vyskúšať si jej použitie na sade 20 príkladov, ktoré sú usporiadané podľa zložitosti. Druhú časť príspevku tvorí aplikácia princípu vo svete grafov – úvod do Ramseyovej teórie.

Dirichletov princíp

Keby sme sa opýtali náhodného okoloidúceho, pravdepodobne by nám povedal, že svetu (a hlavne tomu matematickému) vládne chaos a neporiadok. Cieľom tohto príspevku je ukázať, že aj keď sa to na prvý pohľad nezdá, skutočnosť je úplne iná. Aj v zdanlivo neusporiadaných systémoch totiž platia určité pravidlá, o ktorých si tu niečo povieme.

Pri našom boji budeme mať pomerne silnú zbraň, ktorá je aj napriek svojmu vznešenému názvu *Dirichletov princíp* naozaj jednoduché tvrdenie. Toto označenie nie je jediné, často sa naň odkazuje ako na *priehradkový princíp* alebo *princíp holubníka* (angl. *pigeonhole pricinple*).

Veta. (Dirichletov princíp) *Ak máme rozdeliť $n+1$ guličiek do n košíkov, určite vieme nájsť košík, v ktorom sú aspoň 2 guličky.*

V mnohých prípadoch sa nám viac bude hodiť jeho obecnejšia formulácia:

Veta. (Dirichletov princíp, obecne) *Majme prirodzené čísla $n_1, n_2, \ldots, n_t$, množinu X s aspoň $1+\sum_{i=1}^{t}(n_i-1)$ prvkami a jej rozklad na množiny $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Potom určite existuje i také, že X_i má aspoň n_i prvkov.*

Pre lepšiu predstavu si ho hneď vyskúšame použiť:

KĽÚČOVÉ SLOVÁ. Dirichletov princíp, princíp holubníku, pigeonhole principle, Erdős-Szekeres, Ramseyove vety, Ramseyovo číslo, graf, ofarbenie hrán, podgraf

Úloha 1. V šuflíku máme pomiešaných 10 čiernych, 12 modrých a 8 sivých ponožiek. Koľko ich musíme vybrať, aby sme s istotou mali aspoň jeden pár rovnakej farby?

Riešenie. Každá vytiahnutá ponožka má jednu z troch farieb, teda $n = 3$. Na konci chceme mať aspoň dva kusy spadajúce do rovnakej skupiny, preto nám podľa prvej verzie princípu stačí vybrať $n + 1 = 4$ ponožky.

Úloha 2. Ukážte, že z ľubovoľnej postupnosti $n + 1$ rôznych prirodzených čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vieme vybrať skupinu za sebou idúcich prvkov tak, aby ich súčet bol násobkom n.

Riešenie. Na začiatok sa pozrime na to, aké zvyšky dávajú súčty prvých členov našej postupnosti (teda $a_0 + \cdots + a_k$ postupne pre $k = 0, \ldots, n$) po delení číslom n. Pretože rôznych zvyškov je maximálne n, ale máme $n + 1$ súčtov, určite existujú $i < j$ také, že pre nejaké celé čísla x, y a z platia rovnosti:

$$a_0 + \cdots + a_i = nx + z$$
$$a_0 + \cdots + a_j = ny + z$$

Potom ale $a_{i+1} + \cdots + a_j = (a_0 + \cdots + a_j) - (a_0 + \cdots + a_i) = (ny + z) - (nx + z) = n(y - x)$, čo sme chceli dokázať. □

Dirichletov princíp sa môže s prehľadom využiť aj pri dôkaze nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie. (Erdős-Szekeres) *Z každej postupnosti n^2+1 rôznych čísel vieme vybrať rastúcu alebo klesajúcu podpostupnosť dĺžky $n + 1$.*

Ľahké príklady

Príklad 3. Ukážte, že medzi 25 účastníkmi sústredenia existujú traja takí, že oslavujú narodeniny v rovnakom mesiaci.

Príklad 4. Dokážte, že v každej skupine 101 aspoň dvojciferných čísel vieme nájsť dvojicu takú, že majú posledné dve cifry rovnaké.

Príklad 5. V štvorci 6×6 cm je náhodne rozmiestnených 37 bodov. Dokážte, že vždy existuje štvorec 2×2 cm, v ktorom sa nachádza aspoň päť z nich.

(PraSe 94/95)

Príklad 6. V štvorci 10×10 cm je náhodne rozmiestnených 101 bodov. Dokážte, že vždy vieme vybrať trojuholník s obsahom 1 cm^2, ktorý obsahuje aspoň dva z nich.

Stredne ťažké príklady

Príklad 7. Po stole 1×1 m lezie 51 múch. Ukážte, že s pomocou kruhového hrnca s polomerom $\frac{1}{7}$ m (a trochou šikovnosti **:)**) môžeme chytiť aspoň 3 muchy jednou ranou.

Príklad 8. Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť s diferenciou 60, ktorej všetky prvky sú prvočísla. (PraSe 98/99, 1. séria)

Príklad 9. Na šachovnici 8×8 políčok máme rozostavených 33 veží. Vieme medzi nimi nájsť 5 takých, že sa navzájom neohrozujú? (PraSe 00/01, 3. séria)

Príklad 10. Hrací plán hry „Človeče, nehnevaj sa“ obsahuje 36 políčok usporiadaných do kruhu. Koľko najmenej figúrok musí byť v hre, aby sme vždy mohli niektorú z nich vyradiť pomocou inej nezávisle na ich rozložení a výsledku hodu kockou? (PraSe 00/01, 3. séria)

Príklad 11. Dokážte, že pre všetky nesúdeliteľné čísla a a b je desatinný rozvoj $\frac{a}{b}$ konečný, alebo má periódu maximálne $b - 1$.

Príklad 12. Majme dvadsaťprvkovú množinu A po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel a množinu B definovanú ako $B = \{x^y; x, y \in A\}$. Dokážte, že existujú dva prvky množiny B, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 379.

Príklad 13. Dokážte, že z ľubovoľnej pätice vrcholov pravidelného deväťuholníku vieme jeden odstrániť tak, aby zvyšné štyri tvorili vrcholy lichobežníka.

Ťažké príklady

Príklad 14. New York je okrem iného známy aj pravidelnosťou svojich ulíc – má 151 severojužných a 151 východozápadných ulíc, ktoré sa vždy po 100 metroch krížia. V meste je rozmiestnených spolu 11401 telefónnych automatov. Vieme tam nájsť dva automaty, ktoré sú vzdialené maximálne 200 metrov chôdze po chodníku? (PraSe 00/01, 3. séria)

Príklad 15. Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími než 360 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1. (PraSe 94/95)

Príklad 16. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ vieme z ľubovoľnej $(n + 1)$-prvkovej podmnožiny $\{1, 2. \dots, 2n\}$ vybrať dve rôzne čísla, z ktorých jedno delí druhé. (PraSe 00/01, 3. séria)

Príklad 17. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n existuje jeho prirodzený násobok zložený iba z cifier 0 a 1.

Príklad 18. Na priamke p leží postupne 6 úsekov $u_1, u_2, \dots, u_6$ s dĺžkami po rade $d_1, d_2, \dots, d_6$, ktoré sú po dvoch disjunktné. V jednej polrovine určenej priamkou p zostrojíme body $S_1, S_2, \dots, S_6$ tak, že vrchol S_i tvorí spolu s úsečkou u_i rovnostranný trojuholník $(i = 1, 2, \dots, 6)$. Nakoniec vytvorme kruhy so stredmi v bodoch

$S_1, S_2, \dots, S_6$ a polomermi $d_1, d_2, \dots, d_6$. Dokážte, že neexistuje bod, ktorý by ležal vo všetkých šiestich kruhoch. (PraSe 08/09, 5. séria)

Pre borcov

Príklad 19. Dokážte, že z ľubovoľného šestnásťciferného čísla vieme vybrať neprázdnu skupinu za sebou idúcich cifier, ktorej ciferný súčin je druhou mocninou celého čísla. (PraSe 08/09, 5. séria)

Príklad 20. Majme v rovine n bodov $x_1, \dots, x_n$ v obecnej polohe[1], pričom niektoré z týchto bodov sú spojené úsečkami. *Stupňom* bodu x_k budeme nazývať počet spojníc, ktoré z neho vedú. Dokážte, že ak pre žiadne body rovnakého stupňa neexistuje ich spoločný „sused“ a navyše aspoň jedna dvojica bodov je spojená úsečkou, potom nutne existuje bod, ktorého stupeň je 1. (PraSe 94/95)

Príklad 21. Ukážte, že existuje prirodzené číslo N také, že každé prirodzené číslo $a > N$ vieme „osekať“ z okrajov na prirodzený násobok čísla 2011.
(Kanadská MO 2011)

Príklad 22. Majme v priestore n bodov ($n \geq 3$), pričom ich spojnice sú rôzne dlhé a r z týchto úsečiek je zafarbených. Dokážte, že potom z týchto zafarbených spojníc vieme vytvoriť ťah[2] dĺžky aspoň $\lceil \frac{2r}{n} \rceil$, v ktorom dĺžka úsečiek narastá.[3]
(PraSe 97/98, 2. séria)

Ramseyove vety

Doteraz sme sa zaoberali ohraničovaním neporiadku v najrôznejších situáciách. Zamerajme sa preto v druhej časti príspevku už iba na jednu pomerne rozsiahlu časť matematiky – grafy. S ich pomocou vieme naznačiť rôznorodé vzťahy (priateľstvá, cesty medzi mestami, výmenné kurzy v bankách, …) do jednoduchého modelu, pre ktorý už máme viaceré nástroje, ako s ním pracovať.

Aby sme však mohli pokračovať, potrebujeme si nadefinovať niekoľko pojmov:

Definícia. *Grafom* G nazveme dvojicu (V, E), kde $E \subseteq \binom{V}{2}$.[4] Prvky množín V a E budeme potom nazývať *vrcholmi* prípadne *hranami* grafu G.

Definícia. *Úplným grafom* $K_n = (V, E)$ budeme nazývať graf, v ktorom $|V| = n$ a $E = \binom{V}{2}$.

[1] Množina bodov je v *obecnej polohe*, pokiaľ žiadne tri z nich neležia na priamke.
[2] *Ťah* je postupnosť na seba nadväzujúcich hrán, ktoré sa neopakujú.
[3] Symbol $\lceil x \rceil$ označuje *hornú celú časť* čísla x, teda najbližšie celé číslo y, že $x \leq y$.
[4] Symbolom $\binom{X}{k}$ značíme množinu všetkých k-prvkových podmnožín množiny X.

Definícia. *Podgrafom* grafu $G = (V, E)$ budeme označovať graf $G' = (V', E')$, pre ktorý platí, že $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq \binom{V'}{2} \cap E$.

Definícia. *Ofarbením hrán* grafu $G = (V, E)$ k farbami rozumieme ľubovoľné zobrazenie $f\colon E \to \{1, 2, \dots, k\}$.

Na začiatok si uveďme motivačný príklad, s ktorým ste sa už pravdepodobne stretli.

Tvrdenie. (Večierok so šiestimi) *Na každom večierku s aspoň šiestimi hosťami vieme nájsť trojicu ľudí, kde sa všetci traja navzájom poznajú, alebo trojicu vzájomne neznámych hostí.*

Tvrdenie, ktoré sme práve vyslovili je špeciálnym prípadom rozsiahlejšej teórie pomenovanej po britskom matematikovi F. P. Ramseyovi. Nasledujúca veta má viacero variant, my si uvedieme len jej obecné znenie pre konečné grafy.

Veta. (Ramseyova) *Pre každé $t \in \mathbb{N}$ a skupinu čísel $n_1, n_2, \dots, n_t$ existuje také číslo N, že ľubovoľné ofarbenie grafu K_N pomocou t farieb obsahuje ako podgraf K_{n_i}, kde všetky hrany sú i-tej farby (pre nejaké $1 \leq i \leq t$).*

Poznámka. Pozornejším čitateľom určite neuniklo, že tvrdenie o večierku je naozaj len špeciálnym prípadom pre $t = 2$ a $n_1 = n_2 = 3$. Týmto parametrom odpovedá napr. $N = 6$.

Definícia. Najmenšiu hodnotu N vyhovujúcu Ramseyovej vete s parametrami $t, n_1, n_2, \dots, n_t$ často označujeme $R(n_1, n_2, \dots, n_t)$ a nazývame *Ramseyovým číslom.*

Poznámka. Z definície Ramseyových čísel je jasné, že pre každú dvojicu čísel a, b platí $R(a, b) = R(b, a)$ (v nájdenom grafe len zmeníme farby hrán na opačné), podobná vlastnosť platí aj pre prípad $t \geq 3$.

Odhad Ramseyových čísel

Ramseyove čísla majú síce pekné vlastnosti, ale bez toho, aby sme poznali ich (približnú) hodnotu, je ich využitie dosť obmedzené. Tým sa postupne dostávame k menej príjemnej záležitosti – v skutočnosti je známa len malá časť týchto hodnôt, napr.:

- $R(3, 3) = 6$,
- $R(3, 4) = 9$,
- $R(3, 5) = 14$,
- $R(3, 6) = 18$,
- $R(4, 4) = 18$,
- $R(4, 5) = 25$,
- a niektoré ďalšie

Pri viacerých je ďalej známy aspoň interval, v ktorom sa nachádzajú, napr.:

- $35 \leq R(4, 6) \leq 41$,
- $43 \leq R(5, 5) \leq 49$,

- $58 \leq R(5,6) \leq 87$,
- $102 \leq R(6,6) \leq 165$,
- $\ldots$

Z „viacfarebných“ Ramseyových čísel spomeniem napríklad, že $R(3,3,3) = 17$, dôkaz tejto rovnosti už ale nie je úplne triviálny.

Veta. (Horný odhad) *Pre ľubovoľnú dvojicu čísel $k, l \in \mathbb{N}$ platí: $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.*

Veta. (Dolný odhad) *Pokiaľ čísla n a k spĺňajú nerovnosť $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, potom platí $R(k,k) > n$.*

Dôsledok. Pre každé $k \geq 3$ platí $R(k,k) > 2^{k/2}$.

Kam ďalej?

To, čo sme si tu uviedli, je jedna z najzákladnejších variant Ramseyovej vety. V skutočnosti je možné ju rozšíriť a zobecniť viacerými spôsobmi, za zmienku stoja hlavne nasledujúce dve možnosti:

(1) Doteraz sme ofarbovali hrany, teda dvojprvkové množiny vrcholov, rovnako ale môžeme ofarbovať aj väčšie skupiny (veľkosti n). Potom opäť hľadáme určitú podmnožinu vrcholov spĺňajúcu podmienku, že všetky n-tice v nej obsiahnuté sú rovnakej farby.

(2) Druhou možnosťou je zabudnúť na konečné grafy a prejsť rovno k tým nekonečným. Tu už ale musíme byť opatrnejšími, pretože bez podmienky konečnosti grafov vieme napáchať oveľa viac šarapaty :)

Ani jednému z možných rozšírení sa už venovať nebudeme.

Literatúra a zdroje

[1] Knižnica PraSiatka, *http://mks.mff.cuni.cz/library/*
[2] Archív PraSiatka, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/*
[3] Internetové fórum *Mathlinks*, *http://www.mathlinks.ro*
[4] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2009.

Pri písaní príspevku som sa inšpiroval príspevkom Davida Stanovského *Dirichletův princip*, za čo sa mu chcem poďakovať.