

# O geometrických nerovnostech

Jaroslav Švrček (PřF UP v Olomouci)

**ABSTRAKT.** Příspěvek na příkladech osvětluje základy i pokročilejší metody řešení geometrických nerovností.

Problematika geometrických nerovností patří mezi náročnější partie elementární matematiky, neboť vyžaduje od matematiků pracujících v této oblasti nadstandardní schopnost propojit své znalosti z oblasti algebraických nerovností a geometrie (především planimetrie). Mezi nejvýznamnější a současně nejnámější geometrické nerovnosti přitom patří nerovnost Weitzenböckova, Finsler–Hadwigerova, Neuberg–Pedoeova, Erdős–Mordellova, Eulerova a další.

Čas od času se takové nerovnosti objevují také v naší MO, v matematických korespondenčních seminářích a dalších soutěžích určených matematicky talentovaným středoškolákům. Ke krátké prezentaci uvedené tematiky poslouží např. následující úlohy.

**Úloha 1.** Nechť  $a, b, c$  jsou délky stran a  $2s = a + b + c$ . Dokažte, že platí nerovnosti

- $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$ ,
- $8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$ ,
- $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 48(s - a)(s - b)(s - c)$ ,
- $\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3$ .

**Úloha 2.** Nechť  $a, b, c$  jsou délky stran a  $S$  obsah trojúhelníku, pak platí

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Dokažte.

**Úloha 3.** Nechť  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Dokažte nerovnosti

- $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$ ,
- $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ .

**Úloha 4.** Úhlopříčky tětívového čtyřúhelníku  $ABCD$  se protínají v bodě  $M$ . Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|AB|}{|CD|} + \frac{|CD|}{|AB|} + \frac{|BC|}{|DA|} + \frac{|DA|}{|BC|} \leq \frac{|MA|}{|MC|} + \frac{|MC|}{|MA|} + \frac{|MB|}{|MD|} + \frac{|MD|}{|MB|}.$$

---

KLÍČOVÁ SLOVA. geometrické nerovnosti, nerovnosti v trojúhelníku