Nestandardní metody

Víťa Kala

V 60. letech minulého století jistý pan Robinson vymyslel, že celý matematický svět je možné rozšířit o spoustu dalších, takzvaných nestandardních prvků. S těmito nestandardními prvky pak do matematiky přijdou i nejrůznější nesmírně divné principy, které najednou začnou platit. My si na přednášce některé z nich uvedeme a seznámíme se s tím, jak se dá těchto podivností využít k řešení praktických příkladů.[6]

Jak je vlastně toto rozšíření možné? Vždyť přece NIC nemůže být větší, než CELÝ matematický svět? To je sice pravda, ale ono se to dá obejít takovouto fintou:[7] celý matematický svět (někdy se mu říká taky univerzum) je tak velký, že je možné jej zkopírovat do sebe sama (existuje jeho část, která je úplně stejná, jako celek). Tuto část budeme od teď považovat za naše standardní univerzum. Najednou máme ale kolem tohoto standardního matematického světa ještě spousta místa, kam ho můžeme rozšiřovat! Vhodnou část tedy zvolíme za náš rozšířený svět (ten se nazývá internální univerzum). A hle: hnedle máme rozšíření standardního světa (který je úplně stejný, jako původní svět) do internálního univerza. No a celému původnímu světu se občas taky říká externální univerzum.

Tento postup se dá provést za předpokladu, že platí následující axiom, který za pravdivý sice většina matematiků nepovažuje, je ale dokázané, že jeho přidáním k ostatním matematickým axiomům nic nezkazíme. Jakmile jej přijmeme, můžeme už z něj dokázat všechna další tvrzení, která v našem nestandardním světě platí.

Axiom. (Superuniverzality[8]) *Existuje libovolně šílená množina.*[9]

Co že to znamená ta libovolně šílená množina? No přece přesně to, že může být libovolně šílená (: Třeba existuje množina x, jejímž jediným prvkem je ona sama (tedy $x = \{x\}$). Anebo existují dvě množiny x, y takové, že $x \in y$ a $y \in x$. Anebo cokoli dalšího, na co si jen vzpomeneš ...

[6] K tomu, aby tato teorie mohla být vykládaná precizně, je potřeba znát velké množství vysokoškolské matematiky. Smiř se proto s tím, že skoro žádné tvrzení neplatí přesně tak, jak je zde ve sborníčku napsané nebo jak si je uvedeme na přednášce. Na této přednášce se tedy budeme bavit o tvrzeních, která neplatí v teorii, jež je sama o sobě v zásadě šílená a nesmyslná (:

[7] Nic si z toho nedělej, pokud zbytku tohoto odstavce neporozumíš. Pro pochopení zbytku přednášky to není vůbec potřeba.

[8] Většina tvrzení, se kterými se potkáme, bude mít podobně vtipné názvy (:

[9] Pozorná čtenářka si možná všimla, že tato formulace není zcela matematicky korektní. Pro zájemce ale můžu uvést i exaktní formulaci tohoto axiomu, z které možná bude patrná výhoda neformálního přístupu: Buďte $t \subseteq a$ množiny takové, že t je tranzitivní. Buď r extenzionální relace na a taková, že (a, r) je koncové rozšíření $(t, \in)$. Pak existuje tranzitivní množina t' a izomorfismus $f : (t', \in) \simeq (a, r)$ takový, že $f \restriction t = id$.

Princip saturovanosti

Princip. *Ať jsou $M_1, M_2, \dots$ množiny*[10] *takové, že když si vyberu konečně z nich, mají neprázdný průnik (takovému systému množin se říká centrovaný). Pak všechny množiny mají neprázdný průnik.*

Tento princip je zcela zásadní a má nedozírné důsledky. Představme si třeba množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a označme $A_i = \mathbb{N} - \{i\}, i = 1, 2, 3, \dots$ (množinu, kterou dostaneme, když z $\mathbb{N}$ vyhodíme číslo i). Průnik konečně mnoha z těchto množin je jistě neprázdný (obsahuje nekonečně mnoho nevyhozených přirozených čísel), a tedy podle principu saturovanosti musí mít všechny množiny neprázdný průnik. Musí tedy existovat přirozené číslo n, které není rovné žádnému z čísel 1, 2, 3, … ! S takovým číslem se člověk na ulici jen tak nepotká.

Setkáváme se tedy se zvláštní situací – množina $\mathbb{N}$ standardních přirozených čísel se nám s přechodem do nového světa nafoukla a přibyla do ní nová nestandardní přirozená čísla. Tuto množinu všech (i nestandardních) přirozených čísel budeme značit N. Jak už to tak v matematice bývá, za konečné se považují ty množiny, jejichž počet prvků je rovný nějakému přirozenému číslu. S novými přirozenými čísly se nám tedy najednou objevily i nové konečné množiny (které jsou větší, než libovolná standardní konečná množina).

Stejně tak, jako jsme dokázali, že množina přirozených čísel je větší, než jsme si mysleli, bychom mohli podobné tvrzení dokázat třeba o racionálních nebo reálných číslech. V tomto případě bychom zjistili, že musí existovat nekonečně malá reálná čísla, což má také spoustu zajímavých důsledků (najednou totiž třeba půjde v jistém smyslu mluvit o „sousedních“ reálných číslech, což mnohé úvahy značně zjednoduší, ale ve standardní matematice bohužel nejde).

Princip přenosu

Princip. *Nějaké tvrzení (o standardních množinách) platí ve standardním matematickém světě právě tehdy, když platí v našem rozšíření.*

Tím, že jsme přešli do našeho většího světa, jsme tedy opravdu nic neztratili – platí tu přesně totéž, co v běžném nudném světě většiny matematiků.

[10] Tady si přece jen neodpustím jednu upřesňující poznámku pro znalé. Toto tvrzení platí jen pokud množin není příliš mnoho – je-li jich méně než nějaký libovolně velký, ale předem zvolený kardinál κ.

Princip finitarizace

Princip. *Každá množina*[11] *je podmnožinou nějaké konečné množiny.*

Tak teď už se ale ten Víťa musel úplně zbláznit, ne? Jak by mohla být nějaká *nekonečná* množina částí nějaké *konečné*?! Světe div se, ono to opravdu jde … Aby si člověk mohl aspoň trochu představit, jak je to možné, je dobré si uvědomit, že v rozšířeném světě je konečných množin mnohem víc, než kolik jich bylo v tom původním standardním. Takže není divu, že je víc i těch množin, které jsou částí nějaké konečné množiny.

Tento tvrzení je jedním z nejzajímavějších důsledků nestandardního rozšíření. Umožňuje totiž snadno a bezbolestně rozšířit platnost některých tvrzení, která platí pro konečné množiny, i na množiny, které jsou nekonečné. Jedním takovým příkladem, který vyřešíme na přednášce, je tento:

Příklad. Buď G (nekonečný) graf takový, že každá konečná množina vrcholů jde obarvit k barvami tak, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. Dokaž, že potom jde takto obarvit celý graf.

[11] Toto platí opět jen pro množiny (externálně) menší než náš známý kardinál κ.