Nerovnosti v trojuholníku

Mirka Sotáková

Niektoré užitočné vzorčeky

Tvrdenie.

- $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, tzv. Herónov vzorec.
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
- $R = \frac{abc}{4S}$.
- $a = 2R\sin\alpha$.
- $r = S/s$, $r_a = S/(s-a)$.
- ${t_a}^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.
- ${t_a}^2 + {t_b}^2 + {t_c}^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.
- $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, tzv. sínusová veta.
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, tzv. kosínusová veta.
- $\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}$.
- $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.
- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
- $\cos\alpha + \cos\beta + cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Posledné 2 vzorce platia pre $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Niektoré užitočné nerovnosti

Tvrdenie.

- AG: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$.
- AK: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}$.

Obe nerovnosti platia pre $x_i \geq 0$, rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = \cdots = x_n$.

• $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$, tzv. Cauchyho-Schwarzova nerovnosť.

Zaujímavé nerovnosti, ktoré platia v trojuholníku

Veta. (Finsler-Hadwigerova nerovnosť)

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Veta. (Eulerov vzorec, Eulerova nerovnost) *Ak O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a S stred jemu vpísanej kružnice, potom $|SO|^2 = R(R-2r)$. Keďže $|SO|^2 \ge 0$ tak $R \ge 2r$.*

Veta. (Erdősova-Mordellova) *Nech O je ľubovoľný bod vnútri trojuholníka ABC. Označme $R_1 = |OA|$, $R_2 = |OB|$, $R_3 = |OC|$ a r_1, r_2, r_3 veľkosti kolmíc z O na BC, CA, AB. Potom*

$$R_1+R_2+R_3 \ge 2(r_1+r_2+r_3).$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď je trojuholník rovnostranný.

Veta. (Schreiberova nerovnosť) *Pri rovnakom označení, ako v predošlej vete, platí*

$$R_1+R_2+R_3 \ge 6r,$$

pričom rovnosť nastáva, práve keď je trojuhoník rovnostranný.

Veta. (Stewartova) *V trojuholníku ABC preložme vrcholom C priamku p, ktorá pretína stranu AB vo vnútornom bode D. Označme $|AD| = m, |BD| = n, |CD| = r$. Potom*

$$cr^2 = a^2m + b^2n - cmn.$$

Dôsledok. *Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k s polomerom R. Majme kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$, ktoré sa k dotýkajú zvnútra a postupne tiez dvojíc polpriamok (AB, AC), resp. (BA, BC), (CA, CB). Potom*

$$r_1+r_2+r_3 \ge 4r,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď je trojuholník rovnostranný.