Nerovnosti s podmínkou

Michael „Majkl“ Bílý

Abstrakt. Mnoho nerovností má u sebe ještě takzvanou omezující podmínku. Příspěvek se zabývá metodami řešení právě takových nerovností od těch základních až po některé pokročilé.

Teorie

K řešení jednoduchých i těch velmi složitých nerovností budeme potřebovat některé zbraně.

Definice. (Homogenita) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *homogenní* stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí

$$V(ta,tb,tc) = t^{\alpha} V(a,b,c).$$

Definice. (Symetrie) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *symetrický*, pokud

$$V(a,b,c) = V(a,c,b) = V(b,a,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b) = V(c,b,a).$$

Definice. (Cykličnost) Výraz $V(a,b,c)$ nazveme *cyklický*, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj.

$$V(a,b,c) = V(b,c,a) = V(c,a,b).$$

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro libovolná kladná čísla $x_1, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Tvrzení. (Cauchyho nerovnost) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2.$$

Rovnost v Cauchyho nerovnosti nastane právě tehdy, když existuje λ takové, že

$$u_1 = \lambda v_1, u_2 = \lambda v_2, \ldots , u_n = \lambda v_n.$$

Teď, když už máme všechny zbraně, se pustíme do boje.

Příklady

Příklad 1. Reálná čísla a, b, c, d splňují

$$ab + cd = 1, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Dokažte, že některá dvě z těchto čísel se liší nejvýše o 1 a některá dvě se liší nejméně o 1. (MO 61–C–S–3)

Příklad 2. Reálná čísla a, b, c, d splňují $ab + bc + cd + da = 16$. Dokažte, že některá dvě z nich mají součet nejvýše 4. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (MO 61–C–I–4)

Příklad 3. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad \text{a} \quad ad + bc = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b + c + d$ a zjistěte, které čtveřice a, b, c, d ji dosahují. (MO 61–A–II–4)

Příklad 4. Reálná čísla a, b, c, d, e splňují

$$a + b + c + d + e = 8, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Jaké největší hodnoty může nabývat e? (Bílovec)

Příklad 5. Reálná čísla x, y, z splňují

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že

(i) každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9 a nejvýše 25,
(ii) některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné alespoň 5.

(MO 60–A–III–3)

Příklad 6. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl je v absolutní hodnotě nejvýše t. (iKS, A1)

Příklad 7. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla splňující $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Dokažte

$$36 \le 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) \le 48.$$

(IMO shortlist 2010, A2)

Příklad 8. Pro kladná a, b, c splňující $abc=1$ dokažte

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c.$$

(MO 52–A–III–6)

Příklad 9. Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ taková, že $abc=1$. Dokažte

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^5+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^5} \le 3.$$

(IMO 2005)

Příklad 10. Pro kladná čísla a, b, c, d platí $abcd=1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \ge 1.$$

(Čínská MO 2004)

Příklad 11. Reálná čísla $x, y, z \ge 1$ splňují $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

(Íránská MO 1998)

Substituce

Substituci poznáte podle několika vodítek:

(1) Některé proměnné se ve výrazu chovají jako nějaký goniometrický vzorec.
(2) Proměnné jsou stranami trojúhelníka nebo jsou svázány nějakou jinou známou podmínkou.
(3) Substituce vám přímo pomůže přeformulovat do hezčího tvaru dokazovanou nerovnost, nebo aspoň její podmínku (občas vás může podmínky zbavit).

Jednotlivé substituce si ukážeme na přednášce. Jakmile na nějakou „výhodnou“ substituci přijdete, pravděpodobně jste už na úlohu vyzráli a stačí ji pak umlátit nějakou běžnou metodou.

Příklad 12. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Příklad 13. Pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(IMO 2000)

Příklad 14. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte

(i) $\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c-a) \leq 3abc$, (IMO 1964)
(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2b(a-b) \geq 0$. (IMO 1983)

Příklad 15. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x + y + z = xyz$. Dokažte

(i) $x + y + z \geq 3\sqrt{3}$,
(ii) $xyz \geq 3\sqrt{3}$,
(iii) $xy + yz + zx \geq 9$.

Příklad 16. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z = xyz$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Korea 1998)

Příklad 17. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x + y + z + 2 = xyz$. Dokažte

(i) $x + y + z \geq 6$,
(ii) $xyz \geq 8$,
(iii) $xy + yz + zx \geq 12$.

Příklad 18. Pro kladná x, y, z splňující $xy + yz + zx + xyz = 4$ dokažte

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

(Indie 1998)

Příklad 19. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z + 2 = xyz$ dokažte

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2(x+y+z+3)}.$$

Příklad 20. Nechť kladná x, y, z splňují $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Dokažte

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + \sqrt{\frac{2-y}{2+y}} + \sqrt{\frac{2-z}{2+z}} \geq \sqrt{3}.$$

Příklad 21. Kladná čísla a, b, c splňují $ab + bc + ca = 1$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} \leq \frac{1}{abc}.$$

(IMO shortlist 2004)

Příklad 22. Pro nezáporná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} x\sqrt[3]{y+z} \leq 3\sqrt[3]{2}.$$

Příklad 23. Kladná čísla a, b, c splňují $\min(a,b,c) \geq \frac{1}{4}\max(a,b,c)$. Dokažte

$$(ab+bc+ca)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Literatura a zdroje

[1] Archiv Matematického Korespondenčního Semináře – seriál o nerovnostech
[2] Stránky české Matematické Olympiády *http://www.math.muni.cz/~rvmo/*
[3] Seminář iKS *http://kms.sk/iks.php*