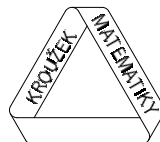


# Nerovnosti

ROBERT ŠÁMAL — 10. LEDNA 2001



## Konvence

Abychom si usnadnili zápis, zavedeme několik konvencí. Kdykoli v dalším textu vystupují proměnné  $k$ ,  $i$ ,  $n$  apod., jedná se o přirozená čísla. Oproti tomu  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ , ... jsou čísla reálná. Zápisem  $(x_i)$ , případně obsírněji  $(x_i)_{i=1}^n$ , rozumíme posloupnost  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (případně vektor  $(x_1, \dots, x_n)$ ). Když řekneme, že nějaká čísla  $(\alpha_i)$  jsou *váhy*, myslíme tím, že jsou to nezáporná reálná čísla, jejichž součet je 1. Posloupnosti  $(x_i)$ ,  $(y_i)$  nazveme *úměrné*, právě když existují čísla  $a, b$  (z nichž je aspoň jedno nenulové) takové, že pro všechna  $i$  platí  $ax_i + by_i = 0$ . (Pokud víš, co je to lineární závislost vektorů, tak si všimni, že to je přesně ono.)

## Znamé nerovnosti

**Průměry.** Necht'  $(x_i)$  jsou kladná reálná čísla,  $(\alpha_i)$  váhy. Pak platí nerovnosti

$$\min \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max$$
$$\min \leq \frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \leq x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq \sqrt{\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2} \leq \max .$$

Přítom rovnost v každé z těchto nerovností nastává právě tehdy, když  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . Druhá z těchto nerovností je tzv. nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem (zkráceně **HG-nerovnost**), třetí je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (zkráceně **AG-nerovnost**) a čtvrtá nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem (**AK-nerovnost**). Průměry v druhé řádce nerovností se nazývají *vážené*. Volíme-li všechna  $\alpha_i$  rovna  $1/n$ , dostáváme nerovnosti v první řádce.

**Mocninné průměry.** Všechny nerovnosti z předchozího odstavce lze zobecnit do nerovnosti jediné. Definujme (pro  $r \neq 0$ ) tzv. mocninný průměr

$$p_r = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^r \right)^{1/r}$$

a dodefinujme hodnoty  $p_0, p_\infty, p_{-\infty}$  limitou. Pak  $p_1$  je (vážený) aritmetický průměr,  $p_2$  průměr kvadratický,  $p_{-1}$  harmonický,  $p_0$  geometrický (fakt!),  $p_{\pm\infty}$  jsou minimum a maximum. Slibované zobecnění říká

$$\alpha \leq \beta \implies p_\alpha \leq p_\beta .$$

Přítom rovnost nastává jen pro  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Čebyševovy nerovnosti.** Řekneme, že posloupnosti  $(a_i)$  a  $(c_i)$  jsou *stejně uspořádané*, pokud platí  $a_i < a_j \iff c_i < c_j$  pro všechna  $i, j$ . Řekneme, že tyto posloupnosti jsou *opačně uspořádané*, pokud  $a_i < a_j \iff c_i > c_j$  (opět pro všechna  $i, j$ ). Mějme dány posloupnosti  $(a_i)$ ,  $(b_i)$ , za posloupnost  $(c_i)$  volme libovolné přeuspořádání čísel  $(b_i)$ . Pak výraz

$$S = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$$

je maximální, právě když  $(a_i)$  a  $(c_i)$  jsou stejně uspořádané. Výraz  $S$  je minimální, právě když  $(a_i)$  a  $(c_i)$  jsou opačně uspořádané.

Důsledkem předchozí nerovnosti je tzv. Čebyševova nerovnost pro průměry. Nechť jsou  $(a_i)$  a  $(b_i)$  stejně uspořádané, pro usnadnění zápisu přepokládejme navíc, že jsou obě rostoucí nebo obě klesající. Pak

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} \leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{n^2} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když  $a_1 = \dots = a_n$  nebo  $b_1 = \dots = b_n$ .

První Čebyševovu nerovnost lze zobecnit na součin více posloupností: jsou-li  $(a_i)$ ,  $(b_i)$ ,  $\dots$ ,  $(d_i)$  posloupnosti kladných reálných čísel,  $(a'_i)$ ,  $\dots$  jejich libovolné přeuspořádání, pak součin

$$a'_1 b'_1 \dots d'_1 + a'_2 b'_2 \dots d'_2 + \dots + a'_n b'_n \dots d'_n$$

nabývá maximální hodnoty, právě když jsou každé dvě z našich posloupností stejně uspořádané. Pro lepší pochopení malý příklad (posloupnosti píšeme do řádků, součet součinů značíme hranatými závorkami):

$$37 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 38.$$

**Jensenova nerovnost.** Buď  $f(x)$  konvexní funkce na intervalu, který obsahuje čísla  $(x_i)$ , buďte dále  $(\alpha_i)$  váhy. Pak platí

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Pokud je  $f(x)$  konkávní, platí opačná nerovnost. Je-li  $f(x)$  ryze konvexní/konkávní, pak rovnost nastává právě tehdy, když jsou všechna  $x_i$  stejná.

Přitom funkce  $f$  je *konvexní*, pokud pro libovolné váhy  $\alpha, \beta$  a libovolná  $x, y$  z definičního oboru  $f$  platí

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

*konkávní* pokud platí nerovnost opačná. Pokud jsou nerovnosti ostré (pro  $x \neq y$  a kladná  $\alpha, \beta$ ), říkáme, že funkce je *ryze konvexní/ryze konkávní*.

**Cauchy–Schwarzova nerovnost (CS).**

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když posloupnosti  $(a_i)$  a  $(b_i)$  jsou úměrné.

**Hölderova nerovnost.** Zobecněním CS je tzv. Hölderova nerovnost (CS dostaneme, pokud volíme  $p = q = 2$ ). Pokud platí  $1/p + 1/q = 1$  a  $p > 1$ , pak

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{1/q}.$$

Pokud  $p < 1$ , platí nerovnost opačná. V obou případech nastává rovnost právě tehdy, když posloupnosti  $(a_i^p)$  a  $(b_i^q)$  jsou úměrné.

**Použití analýzy.** Na dokazování nerovnosti  $f(a, b, \dots) \leq 1$  je možno se dívat jako na hledání maxima funkce  $f$  na nějaké množině. Na zkoumání průběhu funkce vyvinula mocné metody matematická analýza, zmíňme zde aspoň některé z nich. Buď  $f(x)$  funkce definovaná na množině  $M$ . Pokud  $f(x)$  nabývá na  $M$  maxima v bodě  $m$ , tak  $f'(m) = 0$  nebo  $f'(m)$  neexistuje nebo  $m$  leží na hranici  $M$ . Je-li  $f$  funkce více proměnných, pak jsou v  $m$  nulové všechny parciální derivace, které existují nebo  $m$  leží na hranici  $M$ .

Je-li  $M$  omezená uzavřená množina (např. uzavřený interval, součin uzavřených intervalů atd.) a  $f(x)$  spojitá funkce, pak  $f(x)$  nabývá na  $M$  maxima. Je-li  $f(x)$  konvexní funkce, pak  $f(x)$  nabývá maxima v některém z tzv. extrémálních bodů, tj. takových bodů, které nejsou vnitřními body žádné úsečky ležící celé v  $M$ .

## Užitečné postupy

1) Lze danou nerovnost ekvivalentně upravit na  $\sum p_i \geq 0$ , kde všechna  $p_i$  jsou nezáporná čísla (např. druhé mocniny)?

2) Jde použít některá známá nerovnost? Může nám pomoci, když uhadneme, kdy nastává rovnost.

3) Pozor na zesílení: chceme-li dokázat  $A \leq B$  a aplikací nějaké nerovnosti zjistíme, že  $A \leq C$ , stačí už dokázat, že  $C \leq B$ . Často se ale stane, že tato (silnější) nerovnost už neplatí! Dříve, než ji začneme dokazovat proto zkusíme (např. dosazením) zjistit, naše snažení má smysl.

4) Je nerovnost symetrická ve svých proměnných  $a, b, c, \dots$ ? V tom případě je možno předpokládat, že  $a \leq b \leq c \leq \dots$ , případně že  $a$  je maximální/minimální z daných čísel. Někdy může být vhodné nerovnost vyjádřit pomocí symetrických polynomů.

5) Je-li nerovnost homogenní (tj. nezmění se, když každou proměnnou vynásobíme reálným (kladným) číslem  $t$ ), je ji možno normalizovat — předpokládat, že některá proměnná je rovna 1, že součet všech proměnných je 1 apod.

6) Pokud máme nerovnost dokazovat pro  $a, b, c$ , které jsou stranami trojúhelníka, je (nejspíš) potřeba využít trojúhelníkovou nerovnost. Jedna z jejích užitečných podob je tato: Čísla  $a, b, c$  jsou stranami nějakého trojúhelníka právě tehdy, když existují kladná čísla  $x, y, z$ , pro něž

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x.$$

7) Pokud v nerovnosti vystupuje přirozené číslo  $n$ , je možná vhodné použít indukci.

8) Často jsou užitečné „teleskopické“ vzorce

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1, \quad \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}.$$

9) Pokud nejde použít žádná přímočará metoda, zkusme nerovnost upravit na vhodnější tvar, nejlépe s nějakým konkrétním záměrem.

10) Občas jsou užitečné různé triky, jako např. použít diskriminant kvadratické rovnice, trigonometrickou substituci, dát nějakému výrazu geometrickou interpretaci, případně pravděpodobnostní interpretaci, ...

## Příklady

**1. příklad**  $a, b, c \geq 0 \implies (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

**2. příklad**  $\prod a_i = 1, a_i > 0 \implies (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$

**3. příklad\***  $\prod a_i = 1, a_i > 0, s = 1 + \sum a_i \implies \sum \frac{1}{s-a_i} \leq 1$

**4. příklad**  $s = \sum_{i=1}^n a_i, a_i > 0 \implies \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$

**5. příklad** (Nesbittova nerovnost)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

**6. příklad**  $a, b, c, d \geq 0 \implies \sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

**7. příklad**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

**8. příklad\***  $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

**9. příklad**  $a, b, c > 0 \implies a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

**10. příklad** Najděte minimum  $\sin^3 x / \cos x + \cos^3 x / \sin x$  pro  $0 < x < \pi/2$ .

**11. příklad\***  $a, b, c > 0 \implies a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$

**12. příklad\***  $x_i > 0 \implies x_1^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} \geq x_1 \dots x_n (x_1 + \dots + x_n)$

**13. příklad\***  $0 \leq a, b, c \leq 1 \implies \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$

**14. příklad\*\*** Ve čtyřstěnu  $ABCD$  leží vrcholy čtyřstěnu  $KLMN$ . Ukažte, že součet délek hran čtyřstěnu  $KLMN$  je menší než  $4/3$  součtu délek hran  $ABCD$ .

**15. příklad<sup>-</sup>**  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \implies -\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$

**16. příklad** Pro  $a, b, c > 0$  platí

$$(a) \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}, \quad (b) \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

$$(c) \frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

**17. příklad\*** Pro  $a, b, c, d > 0$  platí

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$

**18. příklad**  $a, b > 0 \implies \sqrt[n+1]{ab^n} \leq (a + nb)/(n + 1)$

**19. příklad** Na kostce padají písmena B, A, O s pravděpodobnostmi  $x, y, z$  (tedy  $x + y + z = 1$ ,  $x, y, z > 0$ ), házíme šestkrát. Pro která  $x, y, z$  je největší pravděpodobnost slova BAOBAB?

**20. příklad\*** Najděte všechny hodnoty součtu (pro kladná  $a, b, c, d$ )

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

**21. příklad**  $a, b, c > 0 \implies \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

**22. příklad** Jsou-li  $a, b, c$  strany trojúhelníka, pak  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$ .

**23. příklad** Jsou-li  $a, b, c$  strany trojúhelníka, pak  $2(a^2 + b^2 + c^2) < (a + b + c)^2$ .

**24. příklad** Jsou-li  $a, b, c$  strany trojúhelníka, pak také  $1/(a+b), 1/(b+c), 1/(c+a)$  jsou strany trojúhelníka.

**25. příklad** Jsou-li  $a, b, c$  strany trojúhelníka, pak

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc.$$

**26. příklad\*** Jsou-li  $a, b, c$  strany trojúhelníka, pak  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$ .

**27. příklad** Trojúhelník má strany  $a, b, c$  a obsah  $S$ . Pak platí  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ .

**28. příklad**  $a + b > 0 \implies a/b^2 + b/a^2 \geq 1/a + 1/b$

**29. příklad** Pokud  $a > b > 0$ , pak

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

**30. příklad** Pokud  $x > y > 0$ , pak  $\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2}$ .

**31. příklad** Mezi obdélníky s obsahem 1 má nejmenší obvod čtverec. Mezi obdélníky s obvodem 1 má čtverec největší obsah. Totéž postavení má rovnostranný trojúhelník mezi trojúhelníky, krychle mezi kvádry, ...

**32. příklad\*** Ze všech trojúhelníků vepsaných do dané kružnice najděte ten, který má největší součet čtverců délek stran.

**33. příklad** Je-li  $x_1 \dots x_n = c$ , je  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  minimální pro  $a_1 x_1 = \dots = a_n x_n$ .

**34. příklad** Je-li  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = c$ , je  $x_1 \dots x_n$  maximální pro  $a_1 x_1 = \dots = a_n x_n$ .

**35. příklad** Minimalizujte výraz  $x_1^2 + \dots + x_n^2$  pro  $0 \leq x_i \leq 1$  a  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

**36. příklad** Najděte minimum a maximum výrazu  $3x + 4y + 12z$ , pokud  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**37. příklad**  $0 < x < \pi/2 \implies 2 \sin x + \tan x \geq 3x$

**38. příklad** (trojúhelníková nerovnost)  $\sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum y_i^2} \geq \sqrt{\sum (x_i + y_i)^2}$

**39. příklad** Pokud  $a/b + b/c + c/d + d/a = 4$  a  $ac = bd$ , pak  $a/c + b/d + c/a + d/b \leq 4$ .

**40. příklad\*\***  $\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2} \cdot 1} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3} \cdot 2} + \dots + \sqrt{2k - 2\sqrt{k(k-1)}} \geq \sqrt{k(k+1)}$

**41. příklad\*\*** Buďte  $\alpha, \beta, \gamma$  vnitřní úhly trojúhelníka. Pak platí

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq \frac{27\sqrt{3}}{\pi}.$$

**42. příklad\*\***  $0 \leq x \leq 1 \implies (1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1$

**43. příklad\***  $(a_1 + \dots + a_n)^2 < \frac{\pi^2}{6} (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2)$

**44. příklad\***  $(a_1 + \dots + a_n)^4 < \pi^2 (a_1^2 + \dots + a_n^2) (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2)$

**45. příklad\*\*** Jsou-li  $a_i$  kladná a  $\sum a_i < \infty$ , pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a číslo  $e$  nelze nahradit žádným menším.

## Literatura

Nejdostupnější je asi první z uvedených, nejvíce jsem čerpal z druhého.

- [1] Alois Kufner: Nerovnosti a odhady, edice Škola mladých matematiků, sv. číslo 39, Mladá Fronta 1989
- [2] Arthur Enger: Problem-Solving Strategies, Springer 1998
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: Inequalities, Cambridge 1934
- [4] D. O. Šklarskij, N. N. Čencov, I. M. Jaglom: Izbrannyje zadači i teoremy elementarnoj matematiki. Čast' I: Aritmetika i algebra, Moskva 1954