Nerovnosti

PETR RYŠAVÝ

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje s dvojicí nejjednodušších postupů při důkazech nerovností, a to úpravou na čtverec a AG nerovností. Kromě toho se na příkladech zastavíme u několika nejobvyklejších triků, které se mohou hodit.

Důkazy nerovností jsou jedním z oblíbených témat nejen v PraSátku, ale třeba i v Matematické olympiádě. Pokud se pokoušíme nějakou nerovnost dokázat, musíme si nejprve ujasnit, jakým směrem chceme postupovat a jestli náhodou nedokazujeme něco, co z nerovnosti vyplývá. Rozdíl mezi tím, jak na řešení nerovnosti přicházíme a jak řešení nakonec sepíšeme, je zde ohromný (narozdíl třeba od geometrie).

Příklad. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Než se ale pustíme do příkladů, ujasníme si dva pojmy, které se u nerovností často používají. Jde o cykličnost a symetrii. Platí, že symterické nebo cyklické nerovnosti se dokazují mnohem lépe, protože cykličnost nám umožňuje pro proměnné a, b, c předpokládat, že $a = \max(a, b, c)$. Symetrie umožňuje předpokládat dokonce $a \geq b \geq c$. Většina ze známých nerovností je symetrická nebo přinejmenším cyklická.

Definice. (Symetrie) Výraz V nazveme *symeterický*, pokud se nezmění při libobolné záměně proměnných.

Definice. (Cykličnost) Výraz $V(a, b, c)$ nazveme *cyklický*, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj.

$$V(a, b, c) = V(b, c, a) = V(c, a, b).$$

Úprava na čtverec

První oblíbená metoda je úprava na čtverec. Při ní se snažíme nerovnost ekvivalentně upravovat, až ji převedeme do tvaru, který říká, že součet několika čtverců je alespoň

KLÍČOVÁ SLOVA. nerovnosti, AG nerovnost, úprava na čtverec

nula. To určitě platí, a protože jsme nerovnost upravovali *ekvivalentně*, lze postup obrátit, a tím máme dokázanou i zadanou nerovnost.

Tvrzení. *Nechť x je libovolné reálné číslo. Pak platí*

$$x^2 \geq 0.$$

Příklad 1. Dokažte, že pro libobolná reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Příklad 2. Dokažte, že pro reálná čísla a, b splňující $a + b > 0$ platí

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

(MKS 24-3-3)

AG nerovnost

Druhou metodou, kterou si předvedeme, je používání AG nerovnosti. Je to silná nerovnost s jejíž pomocí lze dokazovat hlavně nerovnosti, které mají na obou stranách členy ve stejných mocninách.

Tvrzení. (AG nerovnost) *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) platí*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Rovnost nastává tehdy a jen tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Příklad 3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (Školní kolo kat. B MO 55r.)

Příklad 4. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq 0.$$

(Krajské kolo kat. A MO 17r.)

Příklad 5. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbittova nerovnost)

Příklad 6. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Příklad 7. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\right) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(Školní kolo kat. B MO 47r.)

Příklad 8. Pro libovolná kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > \frac{5}{2}.$$

Příklad 9. Dokažte, že pro každá tři nezáporná reálná čísla x, y, z platí

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy).$$

Těžší příklady

Příklad 10. Nechť a, b jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2 + b^2} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a+b)^4}.$$

Příklad 11. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{3c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Příklad 12. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1.$$

(Běloruská MO 1998)

Literatura

[1] Vo Quoc Ba Can, Cirtoaje Vasile, Phuong Tran, *Inequalities with beautiful solutions*, GIL, 2010.

[2] M. Rolínek, P. Šalom, *Seriál o nerovnostech*, archiv MKS, 2010.