

Pěkné ráno. V tomto příspěvku najdeš některé známé nerovnosti. Nerovnosti jsou oblíbeným tématem úloh matematických soutěží, například matematické olympiády. Existuje velké množství přístupů, jak nerovnosti řešit. Na přednášce si řekneme jak nějaké základní obraty, tak nějaké trikovější. Obsah přednášek uzpůsobím podle zájmu. Předběžně bych se věnoval použití AG-nerovnosti a vážené AG-nerovnosti, různým substitucím, používání (méně známé) Schurovy nerovnosti, některým trikům (například umocnění nerovnosti) a pravděpodobnostní interpretaci nerovností.

Značení. Výraz $[n]$ bude značit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definice.

(i) *Aritmetickým průměrem reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n nazveme výraz*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(ii) *Geometrickým průměrem kladných reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n nazveme výraz*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Věta. (AG-nerovnost; nejdůležitější ze všech) *Aritmetický průměr kladných reálných čísel je větší roven geometrickému, rovnost nastává, právě když jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Jinými (méně) slovy: Pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ platí:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Věta. (mincová nerovnost; Čebyševova nerovnost) *Nechť $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ jsou reálná čísla a necht' y_1, y_2, \dots, y_n je nějaké pořadí pevně daných reálných čísel z_1, z_2, \dots, z_n . Potom je výraz $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ maximální, právě když je $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, a je minimální, právě když je $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$.*

Věta. (Cauchyho nerovnost) *Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou reálná čísla. Potom $(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$. Rovnost nastává právě tehdy, když jsou buď všechna x_i nulová, nebo existuje nějaké reálné r takové, že $y_i = r \cdot x_i$ pro každé $i \in [n]$.*

Definice. *Reálná čísla w_1, w_2, \dots, w_n nazveme váhami, právě když jsou všechna kladná a jejich součet je roven jedné.*

Věta. (vážená AG-nerovnost) Necht' w_1, w_2, \dots, w_n jsou váhy, necht' a_1, a_2, \dots, a_n jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n}.$$

Definice. Necht' w_1, w_2, \dots, w_n jsou váhy, necht' a_1, a_2, \dots, a_n jsou kladná reálná čísla a necht' $p \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Váženým mocninným průměrem řádu q čísel a_1, a_2, \dots, a_n (s vahami w_1, w_2, \dots, w_n) nazveme výraz

$$p_q^{w_1, w_2, \dots, w_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (w_1 a_1^q + w_2 a_2^q + \dots + w_n a_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

V případě, že budou váhy známé, nebudeme je do horního indexu psát. Dále lze definici ještě rozšířit (limitami) na

$$p_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n},$$

$$p_{-\infty} = \min_{i \in [n]} a_i \text{ a } p_{\infty} = \max_{i \in [n]} a_i.$$

Věta. (nerovnost mezi mocninnými průměry) Necht' $q, r \in \langle -\infty; \infty \rangle, q < r$, potom pro mocninné průměry z předchozí definice platí nerovnost

$$p_q(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq p_r(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

rovnost nastává, právě když je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Poznámka. Průměry p_0 a p_1 už známe (geometrický a aritmetický). Průměru p_{-1} se obvykle říká harmonický, průměru p_2 se říká kvadratický. Nerovnostem $p_{-1} < p_0, p_0 < p_1, p_1 < p_2$ se pak často (po řadě) říká (vážená) HG-nerovnost, AG-nerovnost, AQ-nerovnost.

Věta. (Schurova nerovnost) Necht' x, y, z jsou kladná čísla a α je reálné číslo. Potom

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Věta. (Jensenova nerovnost) Necht' f je ryze konvexní funkce na intervalu $I = \langle a; b \rangle$ (I může být i otevřený či polouzavřený). Necht' w_1, w_2, \dots, w_n jsou váhy a necht' $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Potom platí nerovnost

$$f(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n) \leq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n).$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Příklady

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná $x, y, xy > x + y$ platí

$$\frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{xy-x-y}} \geq 2.$$

Příklad 2. Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí

$$\frac{(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}{abc^2} \leq 2.$$

Příklad 3. Necht n je přirozené. Dokažte že

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Příklad 4. Pro libovolná a, b kladná reálná dokažte nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{8}{1+ab}.$$

Příklad 5. Necht x, y, z jsou kladná reálná čísla splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Nalezňte minimální možnou hodnotu výrazu

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Příklad 6. Necht a, b, c, d jsou kladná reálná čísla, dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Příklad 7. Necht a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Příklad 8. Necht x, y, z reálná splňují $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Dokažte, že pak

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Příklad 9. Necht a_i, b_i jsou pro $i \in [n]$ kladná reálná čísla. Necht $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$, dokažte, že pak platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Příklad 10. Pro libovolná reálná a, b dokažte nerovnost

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + b^3a}{2}.$$

Příklad 11. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platí nerovnost

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

Příklad 12. Dokažte, že pro libovolná a, b, c kladná platí nerovnost

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{2} \geq \frac{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2}{3}.$$

Příklad 13. Dokažte, že pro libovolná a, b, c kladná platí nerovnost

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 \geq a^3b^2c + a^3bc^2 + a^2b^3c + a^2bc^3 + ab^3c^2 + ab^2c^3.$$

Příklad 14. Nechť $x, y, z > -1$ a $x + y + z = 3$. Dokažte, že platí

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Příklad 15. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a_1, a_2, \dots, a_n platí nerovnost

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2a_2 + 1)(a_2^2a_3 + 1) \cdots (a_n^2a_1 + 1).$$

Příklad 16. Dokažte pro $a, b, c > 0$ nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Příklad 17. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo x a přirozené n platí

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \cdots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Příklad 18. Nechť $r_i \in \langle 0, 1 \rangle$ pro $i \in [n]$. Dokažte, že pak platí nerovnost

$$(1 - (1 - r_1)(1 - r_2) \cdots (1 - r_n))^m + (1 - r_1^m)(1 - r_2^m) \cdots (1 - r_n^m) \geq 1.$$