Nerovnosti

Michal Rušin a Martin Tancer

Úvod

V tomto příspěvku najdeš některé známé nerovnosti. Nerovnosti jsou oblíbeným tématem úloh matematických soutěží, například matematické olympiády. Existuje velké množství přístupů, jak nerovnosti řešit. Na přednášce si řekneme jak nějaké základní obraty, tak nějaké trikovější. Obsah přednášek lze přizpůsobit podle zájmu. Předběžně se budeme věnovat použití AG-nerovnosti a vážené AG-nerovnosti, Cauchyho nerovnosti, různým substitucím, používání (méně známé) Schurovy nerovnosti, některým trikům (například umocnění nerovnosti) a pravděpodobnostní interpretaci nerovností.

Známé nerovnosti

Značení. Výraz $[n]$ bude značit množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice.

(i) Aritmetickým průměrem *reálných čísel* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *nazveme výraz*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

(ii) Geometrickým průměrem *kladných reálných čísel* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *nazveme výraz*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Věta. (AG-nerovnost; nejdůležitější ze všech) *Aritmetický průměr kladných reálných čísel je větší roven geometrickému, rovnost nastává, právě když jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Jinými (méně) slovy: Pro libovolná* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *platí:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Věta. (mincová nerovnost; Čebyševova nerovnost) *Nechť* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ *jsou reálná čísla a nechť* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *je nějaké pořadí pevně daných reálných čísel* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. *Potom je výraz* $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ *maximální, právě když je* $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$*, a je minimální, právě když je* $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$.

Věta. (Cauchyho nerovnost) *Nechť* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *jsou reálná čísla. Potom* $(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$.

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou buď všechna x_i nulová, nebo existuje nějaké reálné r takové, že $y_i = r \cdot x_i$ pro každé $i \in [n]$.

Definice. *Reálná čísla $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazveme* váhami, *právě když jsou všechna kladná a jejich součet je roven jedné.*

Věta. (vážená AG-nerovnost) *Nechť w_1, w_2, ..., w_n jsou váhy, nechť a_1, a_2, ..., a_n jsou kladná reálná čísla. Potom platí nerovnost*

$$w_1a_1 + w_2a_2 + \cdots + w_na_n \geq a_1^{w_1}a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n}.$$

Definice. *Nechť w_1, w_2, ..., w_n jsou váhy, nechť a_1, a_2, ..., a_n jsou kladná reálná čísla a nechť $p \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.* Váženým mocninným průměrem řádu q čísel a_1, a_2, ..., a_n (s vahami w_1, w_2, ..., w_n) *nazveme výraz*

$$p_q^{w_1,w_2,\dots,w_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (w_1a_1^q + w_2a_2^q + \cdots + w_na_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

V případě, že budou váhy známé, nebudeme je do horního indexu psát. Dále lze definici ještě rozšířit (limitami) na

$$p_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{w_1}a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n},$$

$$p_{-\infty} = \min_{i\in[n]} a_i \text{ a } p_\infty = \max_{i\in[n]} a_i.$$

Věta. (nerovnost mezi mocninnými průměry) *Nechť $q, r \in \langle -\infty; \infty \rangle, q < r$, potom pro mocninné průměry z předchozí definice platí nerovnost*

$$p_q(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq p_r(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

rovnost nastává, právě když je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Poznámka. Průměry p_0 a p_1 už známe (geometrický a aritmetický). Průměru p_{-1} se obvykle říká harmonický, průměru p_2 se říká kvadratický. Nerovnostem $p_{-1} < p_0$, $p_0 < p_1$, $p_1 < p_2$ se pak často (po řadě) říká (vážená) HG-nerovnost, AG-nerovnost, AQ-nerovnost.

Věta. (Schurova nerovnost) *Nechť x, y, z jsou kladná čísla a α je reálné číslo. Potom*

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je ryze konvexní funkce na intervalu $I = \langle a; b \rangle$ (I může být i otevřený či polouzavřený). Nechť w_1, w_2, ..., w_n jsou váhy a nechť x_1, x_2, ..., $x_n \in I$. Potom platí nerovnost*

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n) \leq w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + \cdots + w_nf(x_n).$$

Rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Užitečné postupy

Když máte nerovnost zadanou pro všechna reálná čísla, zkuste se zamyslet, jestli ji nestačí řešit jenom kladná čísla.

U nerovností, ve kterých je n proměnných, zkuste, jestli nejdou dokazovat indukcí.

Zkuste nějaké substituce, například zkuste substituovat jmenovatele zlomku či výraz pod odmocninou.

Občas se hodí vědět, že čísla a, b, c jsou stranami trojúhelníku, právě když existují kladná x, y, z taková, že $a = x + y$, $b = x + z$ a $c = y + z$. Čísla x, y a z lze pomocí a, b, c vyjádřit jako $2x = a + b - c$, $2y = a - b + c$ a $2z = -a + b + c$.

Nerovnost se nazývá homogenní, pokud se po vynásobení kladným reálným číslem nezmění. Například nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ je homogenní. U homogenních nerovností se občas vyplatí předpokládat nějakou podmínku typu $abc = 1$, $a + b + c = 1$ apod. Někdy se naopak vyplatí, pokud je nerovnost zadána s podmínkou $abc = 1$, $a + b + c = 1$ apod. dosadit tuto podmínku vhodně tak, aby vzniklá nerovnost byla homogenní.

Je-li zadána nerovnost v proměnných x_1, x_2, $\ldots$ x_n. Pokud se nerovnost nezmění prohozením libovolných dvou proměnných x_i a x_j, potom lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Pokud se nerovnost změní po prohození některých dvou proměnných, ale nezmění se, když se změní x_i na x_{i+1} (a x_n na x_1), pak lze předpokládat, že x_1 je větší rovno všem ostatním prvkům.

Pokud je nerovnost zadána pro čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, potom se může hodit nějaká goniometrická substituce, popř. pravděpodobnostní interpretace.

Příklady

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná x, y, $xy > x + y$ platí

$$\frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{xy - x - y}} \geq 2.$$

Příklad 2. Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí

$$\frac{(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}{abc^2} \leq 2.$$

Příklad 3. Nechť n je přirozené. Dokažte že

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Příklad 4. Pro libovolná a, b kladná reálná dokažte nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{8}{1+ab}.$$

Příklad 5. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla splňující $x^2+y^2+z^2=1$. Nalezněte minimální možnou hodnotu výrazu

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

Příklad 6. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla, dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Příklad 7. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Příklad 8. Nechť x, y, z reálná splňují $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Dokažte, že pak

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Příklad 9. Nechť a_i, b_i jsou pro $i \in [n]$ kladná reálná čísla. Nechť $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$, dokažte, že pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Příklad 10. Pro libovolná reálná a, b dokažte nerovnost

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \geq \frac{a^3b+b^3a}{2}.$$

Příklad 11. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí nerovnost

$$2(a^3+b^3+c^3) \leq 3+a^2b+b^2c+c^2a.$$

Příklad 12. Pro libovolná nezáporná a, b, c dokažte nerovnost

$$a^4+b^4+c^4+a^2bc+b^2ac+c^2ab \geq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Příklad 13. Dokažte, že pro libovolná a, b, c kladná platí nerovnost

$$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{2} \geq \frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}{3}.$$

Příklad 14. Dokažte, že pro libovolná a, b, c kladná platí nerovnost

$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+3a^2b^2c^2 \geq a^3b^2c+a^3bc^2+a^2b^3c+a^2bc^3+ab^3c^2+ab^2c^3.$$

Příklad 15. Nechť x, y, $z > -1$ a $x+y+z=3$. Dokažte, že platí

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Příklad 16. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla taková, že $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Příklad 17. Nechť x a y jsou kladná reálná čísla taková, že

$$2x+y+\sqrt{8x^2+4xy+32y^2} = 3+3\sqrt{2}.$$

Dokažte, že pak $x^2y \leq 1$.

Příklad 18. Nechť a, b a c jsou délky stran trojúhelníka. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Příklad 19. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí nerovnost

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1) \geq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1).$$

Příklad 20. Dokažte, že pro libovolné celé $n \geq 3$ a libovolná reálná čísla $x_1 < < x_2 < \cdots < x_n$ platí

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right).$$

Příklad 21. Dokažte pro a, b, $c > 0$ nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Příklad 22. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo x a přirozené n platí

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{\lfloor x \rfloor}{1}+\frac{\lfloor 2x \rfloor}{2}+\cdots+\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Příklad 23. Nechť $r_i \in \langle 0;1\rangle$ pro $i \in [n]$. Dokažte, že pak platí nerovnost

$$(1-(1-r_1)(1-r_2)\cdots(1-r_n))^m+(1-r_1^m)(1-r_2^m)\cdots(1-r_n^m) \geq 1.$$