Nerovnosti

Luboš Dostál

V této přednášce uvedeme přehled nejdůležitějších nerovností.

Úmluva. *Abychom si usnadnili zápis, zavedeme několik konvencí. Kdykoliv v dalším textu vystupují proměnné k, i, n apod., jedná se o přirozená čísla. Oproti tomu a, b, c, x, y, ... jsou čísla reálná. Zápisem $\{x_i\}$, případně $\{x_i\}_{i=1}^n$, rozumíme posloupnost x_1, x_2, ..., x_n. Když řekneme, že nějaká čísla $\{a_i\}$ jsou váhy, myslíme tím, že to jsou nezáporná čísla, jejichž součet je 1. Posloupnosti $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ jsou úměrné, pokud existuje nenulové číslo a takové, že pro všechna i platí $x_i = ay_i$ nebo pro všechna i platí $y_i = ax_i$.*

Věta. (Bernoulliova nerovnost) *Nechť $x > -1$, $0 < p \neq 1$, pak*

$$(1+x)^p \geq 1 + px, \text{ pokud } p > 1 \text{ a}$$
$$(1+x)^p \leq 1 + px, \text{ pokud } 0 < p < 1.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $x = 0$.

Definice. (Mocninné průměry) *Nechť $\{x_i\}$ jsou kladná reálná čísla a $\{a_i\}$ jsou váhy. Pro nenulové reálné p definujeme mocninný průměr výrazem*

$$M_p(x_i, a_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^p\right)^{1/p}.$$

Nechť $M_{-\infty}(x_i, a_i) = \min\{x_i\}$, $M_0(x_i, a_i) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ a $M_\infty(x_i, a_i) = \max\{x_i\}$.

Poznámka. Pokud nastavíme všechny váhy $a_i = \frac{1}{n}$, pak pro $p = -1$ dostáváme *harmonický průměr*, pro $p = 0$ *geometrický průměr* a pro $p = 1$ *aritmetický průměr*.

Věta. (Nerovnosti mezi mocninnými průměry) *Nechť $\{x_i\}$ jsou kladná reálná čísla a $\{a_i\}$ váhy. Nechť p, q jsou reálná čísla, pak platí nerovnosti*

$$p \geq q \quad \Rightarrow \quad M_p(x_i, a_i) \geq M_q(x_i, a_i).$$

Přitom rovnost nastává jen tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Definice. (Konvexní a konkávní funkce) *Nechť λ je reálné číslo v intervalu $[0, 1]$. Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $[a, b]$. Funkci f nazýváme konvexní, pokud pro každé $c, d \in [a, b]$ platí následující nerovnost*

$$f((1-\lambda)c + \lambda d) \leq (1-\lambda)f(c) + \lambda f(d).$$

Pokud v nerovnosti nahradíme $\leq$ symbolem $\geq$, dostáváme definici konkávní funkce.

Věta. (Jensenova věta) *Buď $f(x)$ konvexní funkce na intervalu, který obsahuje čísla $\{x_i\}$, buďte $\{a_i\}$ váhy. Pak platí:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Pokud uvažujeme konkávní funkci, platí opačná nerovnost.

Definice. *Uspořádanou posloupností budeme rozumět posloupnost $\{x_i\}$ takovou, že pro $i \leq j$ platí $x_i \leq x_j$.*

Věta. (Čebyševova nerovnost) *Nechť $\{x_i\}$ a $\{y_i\}$ jsou uspořádané posloupnosti. Označme π permutaci n–prvkové množiny. Pak platí:*

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\pi(1)} + \cdots + x_n y_{\pi(n)} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Věta. (Youngova nerovnost) *Nechť x, y, p a q jsou kladná reálná čísla a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x^p = y^q$.

Věta. (Hölderova nerovnost) *Nechť x_i, y_i, p a q jsou kladná reálná čísla a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když posloupnosti $\{x_i^p\}$, $\{y_i^q\}$ jsou úměrné.

Poznámka. Pro $p = q = 2$ se nerovnost také nazývá *Cauchy-Schwarzova nerovnost*.

Věta. (Minkowského (trojúhelníková) nerovnost) *Nechť x_i, y_i, p jsou kladná reálná čísla. Pak*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Rovnost nastává, pokud posloupnosti $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ jsou úměrné.