Nerovnosti

Libor Barto

V tomto příspěvku uvedeme přehled nejdůležitějších nerovností.

Věta. (Bernoulliova nerovnost) *Nechť $x > -1,\ 0 < p \neq 1$, pak*
$(1+x)^p \geq 1 + px$, *pokud $p > 1$ a*
$(1+x)^p \leq 1 + px$, *pokud $0 < p < 1$.*
Rovnost nastává právě tehdy, když $x = 0$.

Definice. *Nechť $v_i > 0,\ a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^n v_i = 1$. Mocninný průměr řádu p čísel $a_1, \ldots, a_n$ s vahou $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ definujeme:*
$M_v^p(a_1, \ldots, a_n) := (v_1 a_1^p + v_2 a_2^p + \cdots + v_n a_n^p)^{\frac{1}{p}}$, *pokud $p \neq 0$,*
$M_v^p(a_1, \ldots, a_n) := a_1^{v_1} a_2^{v_2} \cdots a_n^{v_n}$, *pokud $p = 0$.*

Poznámka. Pro váhu $v = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ a čísla $p = -1,\ 0,\ 1,\ 2$ dostáváme pořadě běžný harmonický, geometrický, aritmetický a kvadratický průměr.

Věta. (Nerovnosti mezi průměry) *Nechť jsou splněny předpoklady jako v předchozí definici a $r < s$, potom $M_v^r(a_1, \ldots, a_n) \leq M_v^s(a_1, \ldots, a_n)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*

Poznámka. Např. pro $r = 0,\ s = 1$ a váhu jako v minulé poznámce je to známá AG-nerovnost.

Věta. (Youngova nerovnost) *Nechť $x,\ y,\ p,\ q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. Rovnost nastává právě tehdy, když $x^p = y^q$.*

Věta. (Čebyševova nerovnost) *Nechť $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n,\ v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n$, všechna čísla jsou reálná. Nechť π a ϕ jsou permutace čísel 1 až n. Definujme*

$$S_{min} := u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1, \quad S_{max} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Potom
(i) $S_{min} \leq u_{\phi(1)} v_{\pi(1)} + u_{\phi(2)} v_{\pi(2)} + \cdots + u_{\phi(n)} v_{\pi(n)} \leq S_{max}$.
(ii) $n \cdot S_{min} \leq (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \leq n \cdot S_{max}$.

Věta. (Hölderova nerovnost) *Nechť $p,\ q,\ x_i,\ y_i > 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $(y_1^q, \ldots, y_n^q) = k \cdot (x_1^p, \ldots, x_n^p)$.

Poznámka. Pro $p = q = 2$ dostáváme *Cauchyovu nerovnost.*

Věta. (Minkowského (trojúhelníková) nerovnost) *Nechť* $x_i,\ y_i > 0,\ i = 1, \ldots, n,$ $p > 1$. *Potom*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $(y_1, \ldots, y_n) = k \cdot (x_1, \ldots, y_n)$.

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť* f *je ryze konvexní funkce na intervalu* I, $v_i > 0$, $x_i \in\ I,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n}\ v_i = 1$. *Pak*

$$f(\sum_{i=1}^{n} v_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} v_i f(x_i).$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. *Pro ryze konkávní funkce platí opačná nerovnost.*

Poznámka. Pomocí této nerovnosti lze odvodit řadu výše zmíněných nerovností.